

Correction de l'épreuve B - Agrégation de chimie 2022.

Matthieu CHATELAIN

11 février 2024

Table des matières

I. Partie I - Caractérisation objective de l'état du sol, à l'aide de l'appareil Solia	2
I.A. Traversée d'un dioptre séparant deux milieux transparents.	2
I.A.1. Prévion de la direction des ondes incidente, réfléchie, réfractée	2
I.A.2. Répartition de la puissance lumineuse de l'onde incidente entre les ondes réfléchie et réfractée (ou transmise)	2
I.B. Traversée d'un dioptre séparant un milieu transparent et un milieu absorbant, en incidence normale	3
I.C. Application à l'étude de l'appareil Solia.	3
I.C.1. Importance de l'absorption de la lumière par la plaque en fonction de son état (sec ou mouillé)	3
I.C.2. Caractérisation de l'état de surface de la plaque de référence	4
II. Partie II - Étude d'un disdromètre	4
II.A. Mesure de la vitesse limite atteinte par de très petites gouttelettes (cas d'un brouillard)	4
II.A.1. Modélisation du problème	4
II.A.2. Validation expérimentale	6
II.B. Mesure de la vitesse limite atteinte par des gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$ (cas d'une pluie modérée).	6
II.B.1. Une première modélisation de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$.	6
II.B.2. Confrontation aux données expérimentales	6
II.B.3. Une seconde modélisation plus adaptée de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$	7
II.C. Mesure de l'intensité de la pluie à l'aide d'un disdromètre mécanique	7
II.C.1. Calcul de la force exercée par une goutte de pluie sur la surface sensible du disdromètre	7
II.C.2. Mesure de l'intensité de la pluie	7
III. Partie III - Étude d'un radar météorologique	8
III.A. Mesure de la vitesse radiale des hydrométéores	8
III.B. Mesure du taux de précipitation à l'aide d'un radar	9
III.B.1. Puissance rayonnée par l'antenne du radar	9
III.B.2. Équation du radar	9

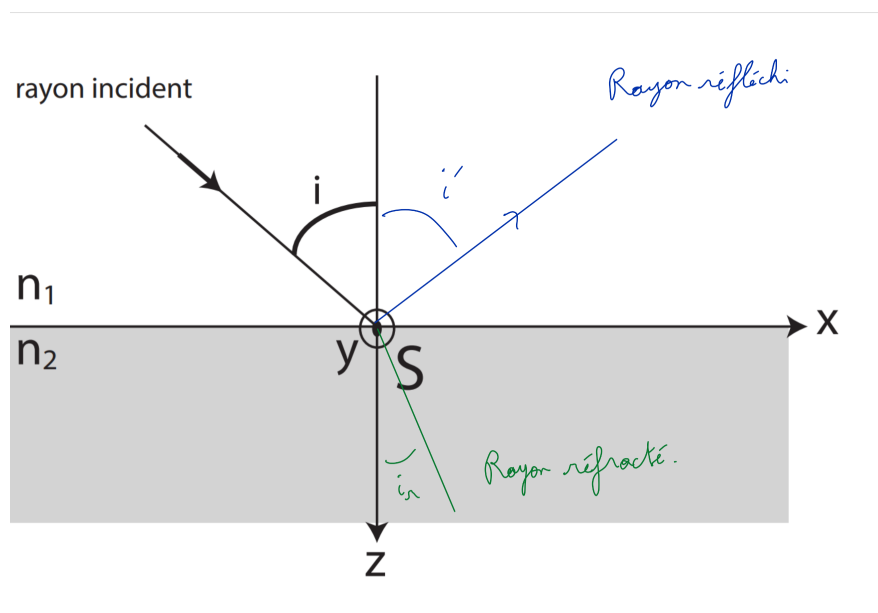


FIGURE 1 – Snell-Descartes

I. Partie I - Caractérisation objective de l'état du sol, à l'aide de l'appareil Solia

I.A. Traversée d'un dioptre séparant deux milieux transparents.

I.A.1. Prédiction de la direction des ondes incidente, réfléchi, réfractée

- (1 point) Les lois de Snell Descartes assurent que (Cf figure 1) :
 - le rayon incident et réfléchis sont dans le même plan et $i = i'$,
 - les rayons incident et réfracté appartiennent au même plan et $n_1 \sin i = n_2 \sin i_r$.

Un point bonus était attribué si on écrivait que les rayons incident et réfléchi étaient dans le plan d'incidence : le plan contenant la normale au dioptre et le rayon incident.

- (1 point) Dans ce cas, $\sin i_r = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \sin i$, donc $i_r < i$, la fonction sinus étant croissante sur l'intervalle de définition des angles i et i_r . Lorsque l'angle i augmente, i_r augmente également. L'angle i ne peut néanmoins pas dépasser $\pi/2$ donc i_r ne peut prendre des valeurs qu'entre $0 < i_r < \arcsin \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} = \arcsin \frac{1}{1.33} \simeq 48.8^\circ$.
- (1 point) Dans ce cas à l'inverse $i < i_r$ et lorsque i augmente, il existe un angle critique à partir duquel il y a **réflexion totale**, aucun rayon lumineux n'est réfractés. Cet angle vaut également $\arcsin \left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \right) \simeq 48.8^\circ$.
- (1 point) C'est le phénomène de dispersion de la lumière dont un exemple spectaculaire est l'arc-en-ciel. La loi de Cauchy établie une relation entre l'indice optique et la longueur d'onde pour un milieu dispersif. Elle s'écrit au premier ordre $n(\lambda) \simeq A + \frac{B}{\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^4}\right)$.

I.A.2. Répartition de la puissance lumineuse de l'onde incidente entre les ondes réfléchi et réfractée (ou transmise)

- (1 point) Cette onde lumineuse est polarisée selon $\hat{u}_y$ et se propage selon z .

6. (1 point) En injectant l'expression précédente dans cette équation et en se souvenant de la relation $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$, on obtient $k_i^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n_1^2$. Et comme $k_i > 0$, $k_i = \frac{n_1}{c} \omega$.
7. (1 point) On combine les équations [2] et [3]. $n_1[2] + c[3]$ donne alors $0 = (n_1 + n_2) E_{0t,x}$, donc $0 = E_{0t,x} = E_{0r,x}$. Ainsi, $\vec{E}_r$ et $\vec{E}_t$ sont colinéaires à $\hat{u}_y$ donc les ondes réfléchies et transmises ont la même direction de polarisation que l'onde incidente.
8. (1 point) D'après la question précédente, $r = \frac{|E_{0r,y}|}{E_{0i}}$ et $t = \frac{|E_{0t,y}|}{E_{0i}}$. Le calcul de $c[4] + n_2[1]$ donne $\frac{E_{0r,y}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, et celui de $n_1[1] - c[4]$ donne $\frac{E_{0t,y}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$. On peut conclure : $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ et $t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$.
9. (1 point) Dans ce cas, $R = \frac{E_{0r,y}^2}{E_{0i}^2} = r^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$ et $T = \frac{n_t E_{0t,y}^2}{n_i E_{0i}^2} = \frac{n_2}{n_1} t^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$.

I.B. Traversée d'un dioptré séparant un milieu transparent et un milieu absorbant, en incidence normale

10. (1 point) On note $\delta := \frac{c}{n_{im}\omega}$ la **profondeur de pénétration** ou **épaisseur de peau** (longueur caractéristique de pénétration de l'onde dans le milieu absorbant). Alors, le champ électrique transmis réel s'écrit $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - n_{re} \frac{\omega}{c} z)$.
11. (1 point) La puissance réfléchie augmente lorsque le milieu devient de plus en plus absorbant, en particulier, on remarque que $R \xrightarrow{n_{im} \rightarrow \infty} 1$ (un milieu infiniment absorbant ne transmettra pas d'énergie, toute l'énergie sera alors réfléchie).

I.C. Application à l'étude de l'appareil Solia.

I.C.1. Importance de l'absorption de la lumière par la plaque en fonction de son état (sec ou mouillé)

12. (1 point) Dans ce cas, $q = R = r^2 = \left(\frac{n_{eau} - n_{air}}{n_{eau} + n_{air}}\right)^2 \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.02$. Ce calcul nous dit qu'une très faible proportion de la lumière est réfléchie par l'eau en incidence normale, c'est la raison pour laquelle l'eau comme les lacs ou la mer nous apparaît bien sombre lorsque l'on est au dessus (si on ne voit pas le fond) et la même raison pour laquelle on voit le fond des piscines ou des tasses : l'eau apparaît transparente et ne réfléchit pas beaucoup la lumière.
13. (2 points) Le flux absorbé lors de la première réflexion sur la surface rugueuse vaut $(1 - q)a\phi_i$, lors de la deuxième réflexion : $(1 - q)(1 - a)p a\phi_i$. Dans ce cas, le flux total absorbé est la somme de tous les flux absorbés après n réflexions (qui vaut alors $(1 - q)a(1 - a)^n p^n \phi_i$) : $\phi_a = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - q)a(1 - a)^n p^n \phi_i = \frac{(1 - q)a}{1 - p(1 - a)} \phi_i \equiv A\phi_i$.
14. (1 point) L'angle à partir duquel il y a réflexion totale est déterminé par θ_c , comme calculé à la question 3. On sous-estime p car les rayons lumineux avec une incidence plus faible que θ_c ne sont pas totalement transmis, il y a réflexion partielle.
15. (1 point) On a alors $p = \cos^2 \theta_c = 1 - \sin^2 \theta_c = 1 - \left(\frac{n_{air}}{n_{eau}}\right)^2 \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.43$.
16. (1 point) Par conservation du flux, on a $\phi_i = \phi_r + \phi_t$, donc $1 = a_s + R_{air/plaque}$, donc $a_s = \frac{4n_{re}n_{air}}{(n_{re} + n_{air})^2 + n_{im}^2} \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.51$.
17. (1 point) De la même manière ici, $1 = a_m + R_{eau/plaque}$, donc $a_m = \frac{4n_{re}n_{eau}}{(n_{re} + n_{eau})^2 + n_{im}^2} \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.60$. L'expression du facteur A est donc $A = \frac{(1 - q)a_m}{1 - p(1 - a_m)} \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.71$.

18. (1 point) A représente la proportion totale de flux absorbé par la plaque mouillée (i.e. après de multiples réflexions), tandis que a_s représente cette même proportion dans le cas d'une plaque sèche (pour laquelle il n'y a pas de multiples réflexions). On remarque d'après les deux questions précédentes qu'une surface mouillée absorbe plus qu'une surface sèche, donc apparaît plus sombre.

I.C.2. Caractérisation de l'état de surface de la plaque de référence

19. (1 point) Elle s'écrit $\phi_i = \phi_R + \phi_{D,T} + \phi_a$.
20. (2 points) $\phi_1 = \phi_R + \phi_{D,\theta_R}$ et $\phi_2 = \phi_{D,\theta_D} = k\phi_{D,T}$. Or, comme $\theta_R \approx \theta_D$, on a : $\phi_1 \simeq \phi_R + \phi_{D,\theta_D} = \phi_R + \phi_2$. Donc $\phi_1 \simeq \phi_R + \phi_2$.
21. (1 point) Lorsque le sol est sec, sa surface est rugueuse donc il diffuse dans toutes les directions, ce qui fait que l'intensité réfléchie est relativement faible (signal 1) et l'intensité diffusée (signal 2) relativement élevée. Lorsque le sol se mouille en revanche, la surface devient plus lisse car l'eau remplit les petites aspérités du sol et diminue la rugosité de surface, ce qui diminue la diffusion (la surface est beaucoup plus plane, il n'y a plus de surfaces aléatoirement orientées, l'intensité diffusée tend vers 0) et cela augmente par la même occasion la réflexion spéculaire car toute la lumière se concentre dans la même direction par réflexion.
- Ce qu'il faut comprendre ici, c'est que la lumière dite diffusée est une partie de la lumière qui est réfléchie dans une direction aléatoire à cause de l'orientation aléatoire du sol.
22. (3 points) On suppose que la quantité de lumière émise par la source est constante durant l'expérience. On a vu également que la quantité de lumière absorbée par la plaque est du même ordre de grandeur lorsque la plaque est sèche ou mouillée (à 40% près), on va donc dans la suite négliger la variation de flux absorbée. On écrit donc la conservation du flux dans le cas mouillé (indiqué par m) et dans le cas sec (indiqué par s) :

$$\begin{cases} \phi_i - \phi_{a,s} = \phi_{R,s} + \phi_{D,T,s} & \equiv \phi_{R,s} + \frac{\phi_{D,\theta_D,s}}{k} \\ \phi_i - \phi_{a,m} = \phi_{R,m} + \phi_{D,T,m} & \equiv \phi_{R,m} + \frac{\phi_{D,\theta_D,m}}{k} \end{cases}$$

On en déduit alors en égalisant les deux équations (sous l'hypothèse audacieuse $\phi_{a,m} \simeq \phi_{a,s}$) :

$$k = \frac{\phi_{2,s} - \phi_{2,m}}{\phi_{1,m} - \phi_{1,s}} \simeq \frac{45-5}{550-50} \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.08.$$

Sans cette hypothèse audacieuse, on obtient :

$$\begin{cases} \phi_i(1 - a_s) = \phi_{R,s} + \phi_{D,T,s} & \equiv \phi_{R,s} + \frac{\phi_{D,\theta_D,s}}{k} \\ \phi_i(1 - A) = \phi_{R,m} + \phi_{D,T,m} & \equiv \phi_{R,m} + \frac{\phi_{D,\theta_D,m}}{k} \end{cases},$$

donc en faisant le quotient pour faire disparaître ϕ_i : $(1 - a_s)(k\phi_{1,m} + \phi_{2,m}) = (1 - A)(k\phi_{1,s} + \phi_{2,s})$, et on obtient finalement

$$k = \frac{(1-A)\phi_{2,s} - (1-a_s)\phi_{2,m}}{(1-a_s)\phi_{1,m} - (1-A)\phi_{1,s} + \phi_{a,m} - \phi_{a,s}} \simeq \frac{0.29*45 - 0.49*5}{0.49*550 - 0.29*50} \stackrel{A.N.}{\simeq} 0.042.$$

II. Partie II - Étude d'un disdromètre

II.A. Mesure de la vitesse limite atteinte par de très petites gouttelettes (cas d'un brouillard)

II.A.1. Modélisation du problème

23. (1 point) Le nombre de Reynold nous donne des informations sur la nature laminaire ou turbulente de l'écoulement de l'air autour de la gouttelette. On sépare souvent l'écoulement en deux régimes limites $Re \ll 1$ pour lequel l'écoulement est considéré laminaire (on rappelle que le nombre de Reynold compare l'advection à la dissipation visqueuse à une échelle spatiale donnée) et $Re \gg 1$ pour lequel l'écoulement est considéré turbulent.

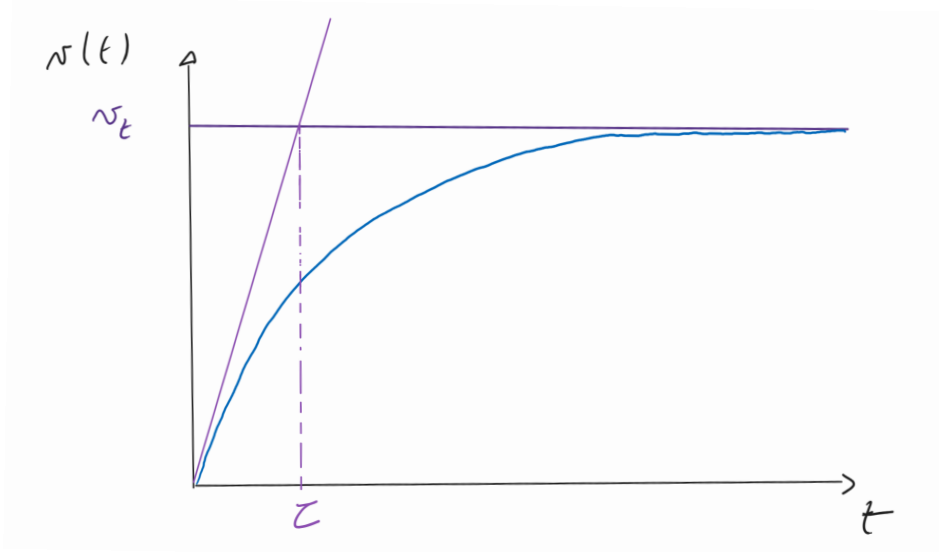


FIGURE 2 – Évolution temporelle de la vitesse de chute de la goutte d'eau

24. (1 point) Cela revient à supposer l'écoulement laminaire et à se placer à très faible nombre de Reynold. Dans ce cas alors $\vec{F}_f = -12\eta \frac{S}{D} v \hat{u}_z = -6\pi\eta R v \hat{u}_z$, la force de traînée dépend alors linéairement de la vitesse.
25. (1 point) Bilan des forces
- Force de traînée exercée par l'air sur la gouttelette (frottement fluides) $\vec{F}_f = -12\eta \frac{S}{D} v \hat{u}_z$,
 - Force d'attraction gravitationnelle (poids, dont la variation avec z est négligée) $\vec{P} = mg \hat{u}_z = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho_e g \hat{u}_z$,
 - Poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{1}{6}\pi D^3 \rho_a g \hat{u}_z$ négligeable devant $\vec{P}$ car $\rho_a \ll \rho_e$,
 - pas de forces de référentiel car supposé galiléen (rotation propre de la Terre négligée, pas de force de Coriolis. Attention, $g \simeq 9.81 \text{ m s}^{-2}$ prend déjà en compte la force d'inertie d'entraînement $F_{ie} \simeq 0.04 \text{ m s}^{-2}$).
26. (1 point) On applique le PFD selon $\hat{u}_z$:

$$m \frac{dv}{dt} = -12\eta \frac{S}{D} v + mg ,$$

alors, avec $m = \frac{1}{6}\pi D^3 \rho_e$, on a :

$$\frac{dv}{dt} + 18 \frac{\eta}{\rho_e D^2} v = g .$$

On identifie alors $\tau \equiv \frac{\rho_e D^2}{18\eta} \equiv 2 \frac{\rho_e R^2}{9\eta}$ et $v_t = \tau g \equiv \frac{\rho_e D^2}{18\eta} g \equiv 2 \frac{\rho_e R^2}{9\eta} g$.

v_t est la vitesse limite (maximale) de chute de la goutte d'eau et τ est le temps caractéristique d'établissement du régime stationnaire, i.e. avant d'atteindre la vitesse v_t .

27. (1 point) On résout $v(t) = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})v_t$. Cf figure 2 .
28. (1 point) On intègre : $z(t) = (t + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} - \tau)v_t - H_0$, où l'on a noté H_0 la hauteur de la goutte au temps initial $t = 0$ (attention à l'orientation de l'axe qui est descendant, on prend pour convention que le sol est à l'altitude $z = 0$, donc $z < 0 \dots$). On cherche t_0 tel que $\exp(-t_0/\tau) = 0.05$, alors $t_0 = \tau \ln 20 \simeq 3\tau$. La hauteur de chute (positive cette fois) correspondante est alors : $H := H_0 + z(t_0) = \tau(2 + e^{-3})v_t \approx 2.05\tau v_t$

29. (1 point) Numériquement : $\tau \approx 20 \text{ ms}$, $v_t \approx 0.19 \text{ m s}^{-1}$ et $H \approx 7.7 \text{ mm}$. Le calcul du nombre de Reynold donne en ordre de grandeur $Re \sim 1$, l'hypothèse formulée sur C était donc relativement pertinente (on voit sur la courbe qui représente C en fonction de Re qu'à $Re \approx 1$, le coefficient C est très proche de la courbe $\frac{24}{Re}$).
30. (2 points) La vitesse d'impacte est $v_t := 2\frac{\rho_e R^2}{9\eta}g$ et varie donc comme le carré du rayon. Cette relation est valable uniquement dans l'hypothèse $Re \ll 1$. Or $Re = \frac{4R^3\rho_e}{3}\rho_a\frac{g}{3\eta^2} = m\rho_a\frac{g}{3\eta^2}$, ce qui donne (en $\mu\text{g} = 10^{-9}\text{kg}$) : $\log \frac{m}{10^{-9}} < -\log(\rho_a\frac{g}{3\eta^2}) + 9 \approx -0.59$. Il faut donc que la goutte d'eau soit au plus de l'ordre du dixième de microgramme.

II.A.2. Validation expérimentale

31. (1 point) C'est tout à fait cohérent avec l'étude menée précédemment : la vitesse limite des gouttes de pluie coïncide avec celle prévue par la loi de Stokes sous l'hypothèse $C = \frac{24}{Re}$ tant que la masse ne dépasse pas -0.5 en échelle log et en microgramme et s'en éloigne passé la valeur de -0.3 . On remarque que l'hypothèse pourrait être allégée en $\log \frac{m}{10^{-9}} < -0.3$ plutôt que -0.6 .

II.B. Mesure de la vitesse limite atteinte par des gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$ (cas d'une pluie modérée).

II.B.1. Une première modélisation de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$.

32. (1 point) En ordre de grandeur, les gouttes de pluies que l'on observe au travers de la vitre tombent à une vitesse qui s'apparente à la vitesse limite et vaut environ 5 m s^{-1} . Dans ce cas, on a $Re \sim 10^3$. Le régime est alors turbulent et on prendra dans la suite $C \simeq 0.4$ constant. On remarque que l'on ne peut pas utiliser le graphe précédent car une goutte de rayon $R = 2 \text{ mm}$ a une masse de $m = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_e \stackrel{A.N.}{\simeq} 33.5 \text{ mg}$, ce qui fait $\log\left(\frac{m}{10^{-9}}\right) = 4.52$, ce qui est en dehors du graphe. Si on devait n'avoir aucune idée de la vitesse des gouttes et que l'on veut quand même l'estimer, on pourrait supposer que c'est globalement linéaire sur ce domaine (à peu près vrai entre 1.0 et 1.3) et ainsi estimer la vitesse à 5 m s^{-1} .
33. (1 point) Comme précédemment, on fait un bilan des forces
- Force de traînée exercée par l'air sur la gouttelette (frottement fluides) $\vec{F}_f = -\frac{1}{2}C\rho_a\pi R^2v^2\hat{u}_z$,
 - Force d'attraction gravitationnelle (poids, dont la variation avec z est négligée) $\vec{P} = mg\hat{u}_z = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_e g\hat{u}_z$,
 - Poussée d'Archimède et forces de référentiel négligées.
- Ainsi (PFD) : $m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{1}{2}C\rho_a\pi R^2v^2$, et on déduit que la vitesse limite de la goutte s'écrit : $v_t = \sqrt{\frac{8g\rho_e R}{3C\rho_a}}$.
34. (1 point) La pente observée sur la courbe de droite vaut environ 11, et correspond au régime durant lequel la goutte a atteint sa vitesse limite. Or, en notant $u = \frac{gt}{v_t}$ la variable adimensionnée, on a : $\frac{dH}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{v_t}{g} \frac{dH}{dt}$. Or dans ce régime linéaire, on a très exactement $\frac{dH}{dt} = v_t$, ce qui conduit à l'équation $v_t = \sqrt{11g} \approx 10 \text{ m s}^{-1}$ et il faut environ 2 s pour atteindre cette vitesse limite (cf courbe de gauche), ce qui correspond à une hauteur d'environ 15 m. Les gouttes ont donc largement atteint leur vitesse limite lorsqu'elles viennent rencontrer la surface du disdromètre.

II.B.2. Confrontation aux données expérimentales

35. (1 point) Cette donnée expérimentale n'est pas compatible avec notre prédiction. Il s'agit alors de remettre en cause le modèle établi. En effet, pour un intervalle de confiance à 95.45%, on a $v_t =$

$(8.83 \pm 0.12) \text{ m s}^{-1}$. La valeur théorique n'est pas dans cet intervalle. (On pourrait également calculer un écart relatif ou Z-score pour appuyer cette assertion).

II.B.3. Une seconde modélisation plus adaptée de la chute de gouttes de pluie de rayon $R = 2.0 \text{ mm}$

36. (1 point) L'application numérique conduit à $v_t \simeq 8.89 \text{ m s}^{-1}$ ce qui est cette fois-ci compatible avec les valeurs expérimentales compte tenu des incertitudes.
37. (1 point) On rajoute `v.append(v[i]+dt*(P(d)-Ff(v[i],D))/m(D))` ou de manière équivalente `v.append(v[-1]+dt*(P(d)-Ff(v[-1],D))/m(D))`.
38. (1 point) On rajoute cette fois `z.append(z[i]+dt*v[i])` ou de manière équivalente `z.append(z[-1]+dt*v[-2])`.
39. (1 point) Ici, on écrit `t.append(i*dt)` ou `t.append(t[i]+dt)` ou `t.append(t[-1]+dt)`.
40. (1 point) On lit sur le graphe de gauche $v_t \simeq 8.9 \text{ m s}^{-1}$ pour une goutte de 2 mm de rayon. Et la vitesse limite est atteinte en environ 1.4 s, ce qui correspond à une hauteur d'environ 8 m

II.C. Mesure de l'intensité de la pluie à l'aide d'un disdromètre mécanique

II.C.1. Calcul de la force exercée par une goutte de pluie sur la surface sensible du disdromètre

41. (1 point) Le terme [1] correspond aux phases (a) et (b) tandis que le terme [2] correspond aux phases suivantes de variation de masse (c) et (d). En conséquence, pour les phases (a,b), le calcul de la force devient : $\vec{F} = m\vec{v}$, pour la phase (c) : $\vec{F} = \underbrace{\rho_e \pi R^2 v_t}_{\frac{dm}{dt}} \vec{v}_t$ et pour la (d) $\vec{F} = \frac{dm}{dt} \vec{v}_t$.
42. (1 point) Par conservation du volume (eau supposée incompressible), on peut écrire : $\frac{2}{3}\pi R^3 = \pi R^2 h$, donc $h = \frac{2}{3}R$.
43. (1 point) La vitesse étant supposée constante égale à v_t , la hauteur d'eau désagrégée est $y(t) = v_t t$.
44. (2 points) (a) Si $y(t) < h$, alors la calotte est entière et de volume $\frac{2}{3}\pi R^3$ et le volume de la partie cylindrique est $\pi R^2(h - y)$.
(b) De la même manière, on calcule le volume correspondant à la partie grisée en remarquant que $y_0 = y - h$, le calcul d'intégral nous donne $\int_0^{y_0} \pi(R^2 - y^2)dy = \pi R^2 y_0 - \frac{\pi}{3} y_0^3$, on peut conclure directement en soustrayant ce volume au volume de la calotte.
45. (1 point) (a) si $y(t) < h \Leftrightarrow t < \frac{2R}{3v_t}$, alors $\frac{dm}{dt} = -\rho_e \pi R^2 v_t$ et $\vec{F} = -\rho_e \pi R^2 v_t^2 \hat{u}_z$
(b) si $\frac{2R}{3v_t} < t < \frac{5R}{3v_t}$, alors $\frac{dm}{dt} = \rho_e (-\pi R^2 v_t + \pi v_t (v_t t - h)^2)$ et $\vec{F} = \rho_e \pi v_t^2 (-R^2 + (v_t t - h)^2) \hat{u}_z$.
46. (1 point) F est constant durant la phase (c) et son maximum durant la phase (d) est atteint pour $\frac{dF}{dt} = 0$: $t_{max} = \frac{h}{v_t}$, i.e. au début de la phase (d) et vaut en cette valeur $F_{max} := |F(t_{max})| \equiv \rho_e \pi (R v_t)^2$.

II.C.2. Mesure de l'intensité de la pluie

47. (1 point) Cette expression est $9.7 \times R^2 \times \exp(-0.39 \times R) = \sqrt{\frac{F_{max}}{\pi \rho_e}}$.
48. (1 point) On a alors $I = \frac{1}{A} \underbrace{\times \frac{N}{\Delta t} \frac{4}{3} \pi R^3}_{\text{volume total par unité de temps}}$. Le calcul numérique donne $I = 9.5 \text{ mm h}^{-1}$.
49. (1 point) Il y a 30 gouttes pour un volume $V = A v_t \Delta t = 3.4 \text{ m}^3$, ce qui fait environ une goutte pour 90 L d'air, la densité en goutte vaut environ 8.9 m^{-3} . La distance typique entre deux gouttes vaut alors $\sqrt[3]{\frac{3.4}{30}} \approx 48 \text{ cm}$.

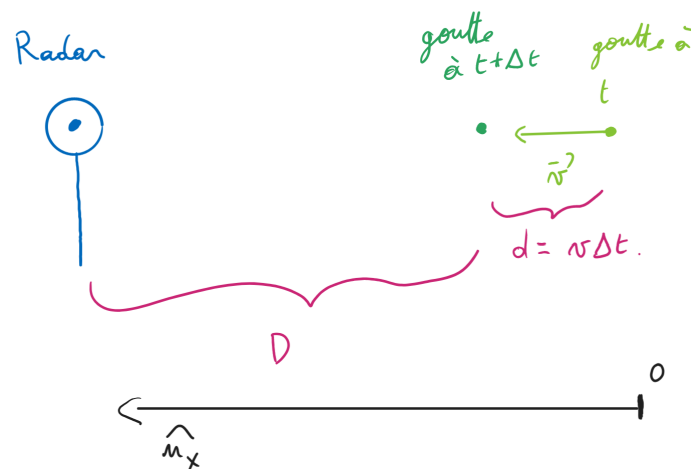


FIGURE 3 – Schéma de l'effet Doppler.

III. Partie III - Étude d'un radar météorologique

III.A. Mesure de la vitesse radiale des hydrométéores

50. (1 point) C'est l'**effet Doppler**, on le perçoit notamment lorsqu'un camion de pompier passe devant nous avec sa sirène allumée. Loin de nous et s'approchant, le son est plus aiguë que le son émis, à notre niveau la fréquence est la même et c'est plus grave quand il s'éloigne. Cet effet est notamment utilisé par les radar ou les chauve-souris (c'est l'écholocation ou écholocalisation par ultrasons) pour connaître la vitesse de leur proie ainsi que dans le domaine médicale pour connaître les débits sanguin grâce à des ultrasons : c'est l'échographie Doppler.
51. (1 point) Il est important de noter que la vitesse est algébrique *dans la direction du radar*. Notons Δt ce temps. Faire un schéma (cf figure 3) La seconde crête arrive à la distance D du radar au bout d'un temps $t_0 = 1/f_0$ mais doit ensuite parcourir la distance $d = -v\Delta t$ avant d'atteindre à nouveau la goutte (grandeur algébrique et négative si la goutte se rapproche), ce qui correspond à rajouter un temps (algébrique) $\delta t = -\frac{v}{c}\Delta t$. Par conséquent, $\Delta t = \delta t + t_0$, donc $\Delta t (1 + \frac{v}{c}) = t_0$, donc $\Delta t = \frac{t_0}{1 + \frac{v}{c}}$. La fréquence reçue par la cible est alors $f'_0 = 1/\Delta t = f_0 (1 + \frac{v}{c})$. On remarque que la fréquence reçue est supérieure à celle émise lorsque la goutte se rapproche et inférieure lorsqu'elle s'éloigne, c'est cohérent avec ce que l'on observe dans la rue.
52. (1 point) De la même manière, on a un premier temps $t'_0 = 1/f'_0$ pour que la seconde crête arrive à la source si elle n'avait pas bougée et à cela s'ajoute un temps algébrique $\delta t' = -\frac{v}{c}\Delta t'$ qui correspond à la distance parcourue par la source pendant ce temps. Ainsi, $\Delta t' (1 + \frac{v}{c}) = t'_0$, donc $f_r = 1/\Delta t' = f'_0 (1 + \frac{v}{c})$.
53. (1 point) On en déduit donc $f_r = f_0 (1 + \frac{v}{c})^2 \sim f_0 (1 + 2\frac{v}{c})$ au premier ordre.
54. (1 point) Applications numériques dans le cas où $v \approx 5 \text{ m s}^{-1}$ et pour une vitesse de la lumière approximative de $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$: $f_r - f_0 \approx 3 \times 10^9 \times \frac{2 \times 5}{3 \times 10^8} = 100 \text{ Hz}$. C'est extrêmement peu, c'est environ 7 ordres de grandeurs en dessous des valeurs de fréquences f_0 et f_r . Mesurer directement f_r ne semble pas raisonnable car il faudrait avoir une précision d'au moins 8 chiffres. C'est là qu'on a besoin d'outils plus sophistiqués comme la détection synchrone, qui permet de mesurer des différences de fréquences très faible par rapport aux ordres de grandeurs en jeu pour les fréquences.
55. (1 point) En utilisant la formule, on obtient $s_t(t) = \frac{K S_{mc} S_{mr}}{2} \{ \cos(2\pi(f_0 + f_r)t + \Phi) + \cos(2\pi\Delta f t + \Phi) \}$.
56. (1 point) Le spectre en amplitude possèdera deux pics, un centré autour de Δf et un centré autour

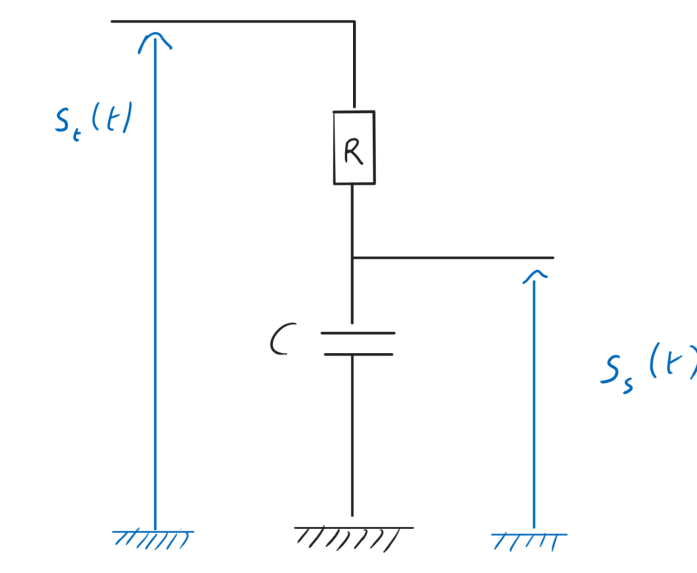


FIGURE 4 – Filtre passe-bas d'ordre 1.

$f_r + f_0$. Il est bon de donner que 7 décades séparent ces deux pics!! Un filtre passe-bas, même mauvais peut facilement permettre d'extraire la fréquence Δf .

57. (1 point) Filtre passe-bas.

58. (2 points) On propose le filtre passe-bas d'ordre un en figure 4. Un diviseur de tension permet d'obtenir $s_s = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega} s_t = \frac{1}{1+jRC\omega} s_t$ et on voit ainsi qu'il s'agit bien d'un passe-bas d'ordre 1.

On a tout intérêt à choisir $\Delta f \ll 1/(2\pi RC) \ll f_r + f_0$, donc à prendre par exemple $R \approx 1 \text{ k}\Omega$ et $C \approx 100 \text{ nF}$ de sorte à avoir une fréquence de coupure de l'ordre de $f_c \approx 1 \text{ kHz}$. Cela convient bien, la fonction de transfert vaut alors environ 1.1 pour Δf et environ 10^{-6} pour $f_r + f_0$, on a efficacement effacé le signal à haute fréquence et bien préservé celui à basse fréquence.

59. (1 point) On compte 10 périodes en 50 ms, donc la différence de fréquence vaut environ $\Delta f \approx 200 \text{ Hz}$, ce qui conduit à la vitesse : $v = c \frac{\Delta f}{2f_0} \approx 10 \text{ m s}^{-1}$.

III.B. Mesure du taux de précipitation à l'aide d'un radar

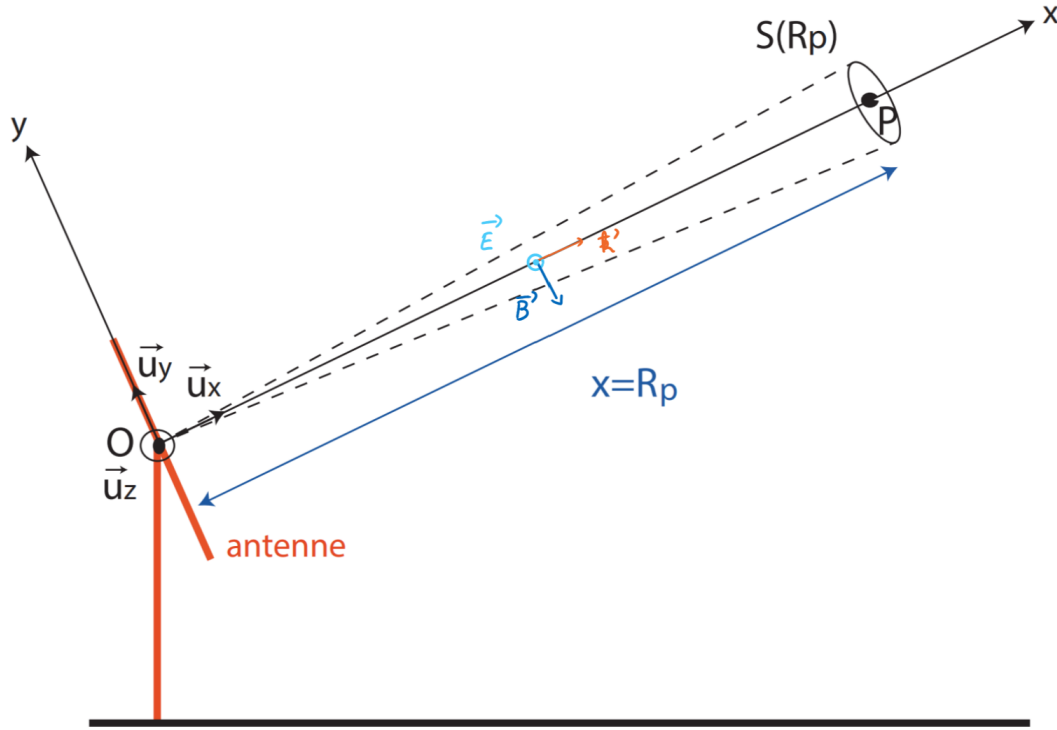
III.B.1. Puissance rayonnée par l'antenne du radar

60. (1 point) Voir la figure 5. On a en norme : $E = cB$. L'expression littérale du vecteur de Poynting est $\vec{\Pi} = \epsilon_0 c E^2 \hat{u}_x = \epsilon_0 c E_0^2 \cos^2(2\pi f_0 t - k \cdot R_p) \hat{u}_x$.

61. (1 point) La puissance moyenne reçue par la surface $\mathcal{S}(R_p)$ est alors $\mathcal{P}_{emis} = \frac{1}{2c\mu_0} E_0^2 \mathcal{S}(R_p) \equiv \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2 \mathcal{S}(R_p)$.

III.B.2. Équation du radar

62. (2 points) Pour cette question, on notera P les puissances et $\mathcal{P}$ les puissances surfaciques. On suppose la puissance surfacique homogène sur toute la surface de sorte que la puissance émise qui atteint la surface σ vaut $P_{incidente} := P_{emise} \frac{\sigma}{\mathcal{S}(R_p)}$. L'énoncé dit que la totalité de la puissance incidente à la goutte (donc qui traverse la surface imaginaire σ) est diffusée. Ces deux puissances étant définies égales d'après l'énoncé (définition de σ) on peut écrire : $P_{incidente} = P_{diffusee}$. Ainsi, comme la puissance est omnidirectionnelle,

FIGURE 5 – Représentation du trièdre directe $(\hat{k}, \hat{E}, \hat{B})$

la puissance *surfactive* rétrodiffusée à une distance r vaut $\mathcal{P}_{rd,s}(r) = \frac{P_{diffusee}}{4\pi r^2} = \frac{P_{incidente}}{4\pi r^2} = \frac{\sigma}{S(R_p)4\pi r^2} P_{emise}$.

Par conséquent, à une distance R_p , cette puissance surfactive s'écrit $\mathcal{P}_{rd,s}(R_p) = \frac{\sigma}{4\pi R_p^2 S(R_p)} P_{emise}$.

63. (1 point) Cette puissance reçue par l'antenne vaut $P_{recue} = \mathcal{P}_{rd,s} * \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \pi \frac{a^2}{4} \mathcal{P}_{rd,s} = \frac{\sigma a^2}{16 R_p^2 S(R_p)} P_{emise}$

64. (1 point) On en déduit alors en remplaçant σ par sa valeur que :

$$P_{recue} = P_{emise} \frac{a^2 \pi^5 |\underline{K}|^2}{16 R_p^2 S(R_p) \lambda^4} D^6 \quad (3)$$

65. (1 point) Le volume sondé pendant une durée τ est donc $c\tau S(R_p)$, ce qui donne pour la puissance

$$\text{reçue : } P_{recue,tot} := N P_{recue} = P_{emise} \frac{a^2 \pi^5 c \tau |\underline{K}|^2}{16 R_p^2 \lambda^4} n D^6$$

66. (2 points) Les variables a , $|\underline{K}|^2$, λ et P_{emis} sont déterminées par l'antenne et R_p est connue. L'appareil mesure alors $P_{recue,tot}$ et en déduit alors $Z = n D^6$. Grâce à la loi empirique de Marshall-Palmer enfin, il permet de remonter à I par la formule suivante :

$$I = \left(\frac{Z / (mm^6 / m^3)}{200} \right)^{\frac{1}{1.6}} = \left(\frac{P_{recue,tot} 10^{18}}{P_{emis}} \frac{2 R_p^2 \lambda^4}{25 a^2 \pi^5 c \tau |\underline{K}|^2} \right)^{\frac{1}{1.6}} \quad (4)$$

Un calcul intermédiaire donne $Z = 7.5973 \times 10^{-15} m^6 / m^3 = 7.5973 \times 10^3 mm^6 / m^3$

67. (1 point) Application numérique en faisant attention aux unités (qui donne un 10^{18}), on obtient : $I = 9.7 mm h^{-1}$, c'est un bon ordre de grandeur pour une pluie modérée.