

CORRIGÉ DE LA COMPOSITION 2017 DE PHYSIQUE DE L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE OPTION CHIMIE

Ce corrigé est proposé par Vincent WIECZNY. Si vous voyez des erreurs, envoyez un mail à agregationchimie#free.fr avec un @ à la place du #. J'essaierai de les corriger le plus vite possible. Pour contacter l'auteur, vous pouvez envoyer un mail à vincent.wieczny#gmail.com (avec un @ à la place du #).

Cette correction est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 non transposé.

Étude d'une machine de RUBE GOLDBERG

I Pendule et poulie

1. On considère le système {masse} supposé ponctuel, de masse m et attachée à un fil inextensible de longueur $\ell = 30$ cm et de masse négligeable, justifiant ainsi la limitation de l'étude à la seule masse pesante. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

On paramétrise le système avec un angle θ , définissant l'écart angulaire à la verticale, pour décrire le mouvement de la masse. On définit ainsi un repère polaire $(O; \vec{e}_r; \vec{e}_\theta)$.

On décrit le mouvement du pendule par le modèle du pendule simple, où le poids de la masse seule \vec{P} et la tension du fil \vec{T} sont les deux seules forces à s'appliquer au système, la liaison pivot étant parfaite.

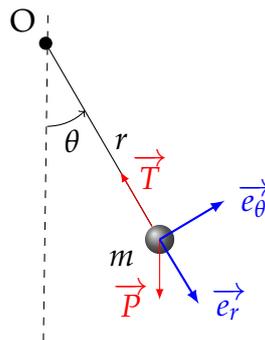


FIGURE 1 – Paramétrisation du pendule simple.

D'après la seconde loi de Newton, le vecteur accélération \vec{a} du système s'écrit :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Par projection sur \vec{e}_θ ,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Compte tenu de l'angle initial θ_0 que l'on peut estimer à $\theta_0 = \arccos\left(\frac{29}{30}\right) \approx 15^\circ$, on peut légitimement se placer dans l'**approximation des petites oscillations**¹ en utilisant le fait que $\sin \theta \approx \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

L'équation du mouvement est une équation d'oscillateur harmonique admettant donc des solutions périodiques de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

La période des oscillations du pendule s'exprime alors

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Compte tenu de la nature de la question, la description du modèle et des différentes hypothèses associées constituait les éléments clés à faire figurer dans la réponse, davantage encore que la résolution analytique connue de tous.

2. **Galilée** (1564-1642, Italie) est le premier scientifique à avoir mené des études expérimentales sur le pendule au **XVII^e siècle**.

Les premières propriétés extraites de ces études sont les suivantes :

- **isochronisme des petites oscillations** : indépendance de la période d'oscillations avec la masse et l'amplitude initiale (dans la limite des petites oscillations) ;
- **période du pendule dépendante de la longueur du fil** : proportionnelle à $\sqrt{\ell}$.

« ... J'ai pris deux balles, l'une de plomb, l'autre de liège, celle-là bien plus de cent fois plus lourde que celle-ci, toutes deux attachées à des fils fins et égaux, long de 4 à 5 coudées², fixés par le haut. Puis, les ayant éloignées l'une et l'autre de la verticale, je les ai laissées aller en même temps ; et toutes deux descendant le long des circonférences, des cercles décrits par les fils et de rayons égaux, dépassèrent la verticale ; puis elles revinrent en arrière par le même chemin et répétant bien cent fois les mêmes allées et venues, elles ont montré d'une manière évidente que la boule lourde marche tellement dans le même temps que la légère, qu'elle ne dépasse pas ce temps ni en cent oscillations, ni en mille, du plus petit intervalle, mais elle marche d'un pas tout à fait égal... »

Galilée, *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde*, 1632, Florence

La capacité de Galilée à **observer** et à **expérimenter** en ne modifiant qu'un seul paramètre ainsi que son sens de la **rigueur dans la mesure** et sa **foi envers les mathématiques** font de lui un père de la physique moderne. Il est le premier expérimentateur de ce qui portera plus tard le nom de **mécanique galiléenne** dont la validité n'est toujours pas remise en cause (à des vitesses faibles de la célérité de la lumière).

3. Par définition de la période des oscillations, le temps Δt_1 nécessaire pour atteindre le heurtoir, puisque situé à la même hauteur que le point de départ de la bille, correspond à une demi-période :

$$\Delta t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \approx 0,55 \text{ s}$$

1. On retient généralement que l'approximation des petites oscillations commence à être remise en cause pour $\theta_0 > 15^\circ$. De toute façon, compte tenu de la nature de la question, il n'était pas attendu un modèle plus complexe que le pendule simple en approximation harmonique.

4. La distance z parcourue par la masse correspond à la longueur de fil déroulé, que l'on peut relier à l'angle θ dont a tourné la poulie par la relation :

$$z = R_p \theta$$

5. On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On considère le système {poulie}. On note $\vec{T}_1 = T \vec{e}_z$ la tension du fil appliquée sur la poulie. D'après le théorème du moment cinétique projeté dans l'axe de la poulie,

$$J_\Delta \ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta (\vec{T}_1) = T R_p$$

On note $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1 = -T \vec{e}_z$, la tension du fil appliquée sur la masse. D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué à la {masse m } et projeté sur l'axe (Oz),

$$m\ddot{z} = mg - T$$

En combinant le théorème du moment cinétique et le principe fondamental de la dynamique ainsi que le fait que $\dot{z} = R_p \dot{\theta}$ (question 4), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{z} = \frac{\kappa}{1 + \kappa} g \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{m R_p^2}{J_\Delta}$$

En intégrant en tenant compte des conditions initiales $\dot{z}(t=0) = 0$ et $z(t=0) = 0$,

$$z(t) = \frac{1}{2} \frac{\kappa}{1 + \kappa} g t^2 \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{m R_p^2}{J_\Delta}$$

6. Par définition du temps Δt_2 nécessaire à la masse pour atteindre l'interrupteur,

$$z(\Delta t_2) = d$$

On en déduit :

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2d(1 + \kappa)}{g\kappa}} \quad \text{avec} \quad \kappa = \frac{m R_p^2}{J_\Delta}$$

Finalement,

$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{2d(J_\Delta + m R_p^2)}{g m R_p^2}}$$

II Photodiode

7. Le rayonnement d'une ampoule à incandescence peut être approximé par le modèle du corps noir. Le spectre - longueur d'onde et intensité - d'un tel rayonnement est **continu** et ne dépend que de la **température** - température du filament pour l'ampoule à incandescence en l'occurrence.

La loi de Wien permet d'estimer, d'après le modèle du corps noir, la longueur d'onde λ_{max} dont l'intensité spectrale est maximale. Dans le cas d'une ampoule à filament chauffé à $T = 2700 \text{ K}$,

$$\lambda_{max} = \frac{\sigma_W}{T} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

L'intensité spectrale est donc majoritairement localisée dans le domaine infrarouge, ce qui signifie que **seule une infime partie** (de l'ordre de 1 à 2 %) **de l'énergie électrique** servant à chauffer le filament est convertie en **énergie lumineuse dans le domaine visible**.

Les dispositifs de remplacement actuels sont les **lampes fluocompactes**, les **lampes halogène** dites *haute efficacité* et les **lampes DEL** (Diode ElectroLuminescente). Les lampes halogène *haute efficacité* sont celles qui présentent l'efficacité lumineuse la plus faible parmi les dispositifs de remplacement, puisqu'à l'origine d'un spectre continu, resserré à proximité du domaine visible - d'où une efficacité renforcée par rapport aux lampes à incandescence. Les lampes fluocompactes et DEL présentent des spectres discontinus de raies : issu des transitions électroniques atomiques du mercure ou d'un comportement de semi-conducteur, ces spectres sont enrichis en longueurs d'onde plus élevées grâce au comportement luminescent de certaines espèces chimiques déposées sur la surface, de sorte à obtenir une lumière blanche. Dans ces dernières, l'énergie électrique contribue majoritairement à l'émission de photons dans le domaine visible.

8. Le flux lumineux Φ étant isotrope, il se répartit uniformément sur une sphère de rayon R , où R désigne la distance à la source. Ainsi, l'éclairement lumineux \mathcal{E} reçu par la photodiode est :

$$\mathcal{E} = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{\Phi_0}{4\pi R^2} = 9,7 \text{ lm} \cdot \text{m}^{-2} = 9,7 \text{ lx}$$

9. D'après le document sur la photodiode, en absence de tout éclairage et en première approximation,³ la photodiode se comporte comme une diode, c'est-à-dire avec un sens passant ($i \neq 0$) et un sens non passant ($i = 0$). En plaçant dans une maille commune avec la photodiode une résistance, c'est-à-dire un dipôle dont la tension à ses bornes est dictée par la tension qui la traverse via la loi d'Ohm, dès lors qu'un courant circule dans la maille - donc quand la photodiode est éclairée - une tension doit pouvoir être mesurée aux bornes de la résistance. Néanmoins, pour que la photodiode présente un tel comportement, il est nécessaire qu'elle fonctionne en polarisation inverse donc mise sous tension en situation non passante (Fig. 2).

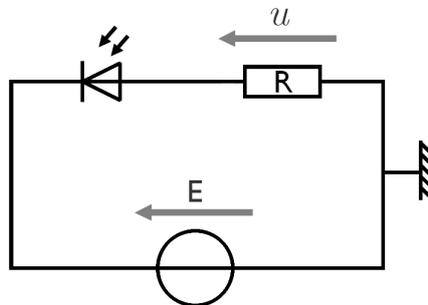


FIGURE 2 – Montage de détection de l'allumage de l'ampoule.

3. La courant d'obscurité est négligeable puisque de l'ordre du pA par rapport aux courants de polarisation qui se chiffrent en nA.

10. D'après les données constructeur, la photodiode fonctionne sous une tension inverse V_S , que l'on fixera à $V_S = 5 \text{ V}$ dans la mesure où les caractéristiques de la photodiode sont connues pour une telle tension inverse. On impose ainsi la tension E de la source idéale de tension avec $E = V_S = 5 \text{ V}$ puisque $u = R i = 0$ puisque la diode est non passante en absence d'éclairement ($i = 0$)⁴.

Compte tenu de l'éclairement attendu au niveau de la photodiode, le courant de polarisation i peut être estimé à partir de la sensibilité S de la photodiode,

$$i = \mathcal{E} S \approx 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ A}$$

La tension u étant initialement nulle en absence d'éclairement, il faut que, lorsque la lampe est allumée, $u > 0,10 \text{ V}$. On en déduit donc une valeur limite de résistance R :

$$R < \frac{u}{i} \approx 1,3 \cdot 10^5 \Omega$$

On peut donc proposer

$$E = 5 \text{ V} \quad \text{et} \quad R = 100 \text{ k}\Omega$$

III Cylindre et piston

11. La pression atmosphérique normale P_a correspond à la pression atmosphérique moyenne au niveau moyen de la mer à la latitude de Paris et vaut

$$P_a \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

en unités du système international.

12. Le modèle du gaz parfait repose sur des hypothèses aux niveaux microscopique et macroscopique.
 Au niveau microscopique,
 — les molécules sont supposées **ponctuelles** ;
 — les molécules **n'interagissent pas entre elles**, seule leur contribution cinétique est prise en compte ;
 — les collisions avec les parois (à l'origine de la pression macroscopique) sont **élastiques** (iso-énergétiques)
 Au niveau macroscopique, le gaz est supposé à l'**équilibre thermodynamique**, ce qui est assuré par une hypothèse de **chaos moléculaire** ;
13. On note U l'énergie interne d'une quantité de matière n_0 de gaz parfait diatomique, soit $\mathcal{N}_A n_0$ molécules. Par extensivité de l'énergie interne,

$$U = \mathcal{N}_A n_0 \times 5 \times \frac{1}{2} k_B T = \boxed{\frac{5}{2} n_0 R T}$$

4. On pourra noter que si la tension aux bornes de la résistance s'élève à $0,10 \text{ V}$, c'est-à-dire $\Delta u = 0,10 \text{ V}$, la tension aux bornes de la photodiode n'en sera que peu affectée.

14. Initialement, le gaz occupe un volume V_1 défini par :

$$V_1 = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 x_1$$

D'après la loi des gaz parfaits,

$$\begin{aligned} P_1 V_1 &= n_0 R T_0 \\ P_1 \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 x_1 &= n_0 R T_0 \end{aligned}$$

de sorte à pouvoir expliciter la position initiale du piston x_1 :

$$x_1 = \frac{n_0 R T_0}{P_1 \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2}$$

15. On considère le **système {gaz}** contenu dans le cylindre. D'après le premier principe de la thermodynamique appliqué au système entre le lâcher brutal du piston et en notant ΔU la variation d'énergie interne du gaz, W la somme des travaux reçus par le système et Q les transferts thermiques reçus par le gaz,

$$\Delta U = W + Q$$

Compte tenu de la rapidité des mouvements du piston, on peut supposer que les transferts thermiques entre le gaz et le milieu extérieur sont négligeables, si bien que $Q = 0$.

En revanche, le travail des forces de pression W_P , négatif puisque fournissant du travail au milieu extérieur, doit être pris en compte :

$$W_P = - \int_i^f P_{\text{ext}} dV = -P_a \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \int_{x_1}^{x_2} dx = -P_a \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (x_2 - x_1) < 0$$

S'agissant de plus d'un gaz parfait, on peut exprimer son énergie interne, uniquement dépendante de la température (question 13). Si le système fournit du travail au milieu extérieur, force est d'admettre que sa température va diminuer. On note T_{f_1} la température finale atteinte par le système. D'après le premier principe de la thermodynamique,

$$\frac{5}{2} n_0 R (T_{f_1} - T_0) = -P_a \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 (x_2 - x_1)$$

On en déduit une relation liant x_1 et x_2 :

$$x_2 - x_1 = \frac{5 n_0 R (T_0 - T_{f_1})}{2 P_a \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2}$$

16. Par un raisonnement similaire issu du premier principe de la thermodynamique et sachant que le travail à prendre en compte comprend le travail des forces de pression ainsi que le travail supplémentaire W_0 , on peut écrire, avec T_{f_2} la température finale du système :

$$\Delta U = W_p + W_0$$

$$\frac{5}{2} n_0 R (T_{f_2} - T_0) = -P_a \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (x_3 - x_1) - W_0$$

On en déduit l'expression de la température finale T_{f_2} du gaz :

$$T_{f_2} = T_0 - \frac{2}{5} \frac{P_a \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 (x_3 - x_1) + W_0}{n_0 R}$$

Compte tenu de l'expression de x_1 (question 14) et du fait que $P_1 = 2 P_a$,

$$T_{f_2} = \frac{6}{5} T_0 - \frac{2}{5} \frac{P_a \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 x_3 + W_0}{n_0 R}$$

17. Pour estimer T_{f_1} , il est nécessaire d'avoir accès à x_2 . La position x_2 est définie par la position de l'équilibre mécanique du système, c'est-à-dire quand la pression au sein du piston a atteint la pression du milieu extérieur P_a . D'après la loi des gaz parfaits,

$$P_a \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 x_2 = n_0 R T_{f_1}$$

$$x_2 = \frac{n_0 R T_{f_1}}{P_a \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2}$$

En remplaçant par les expressions de x_1 et x_2 ,

$$T_{f_1} - \frac{T_0}{2} = \frac{5}{2} (T_0 - T_{f_1})$$

Finalement,

$$T_{f_1} = \frac{6}{7} T_0 < T_0$$

Applications numériques.

$$T_{f_1} \approx 255 \text{ K} \approx -18^\circ \text{C}$$

$$T_{f_2} \approx 133 \text{ K} \approx -140^\circ \text{C}$$

Il n'est pas surprenant que la température finale du gaz soit plus faible dans le cas où le piston doit pousser la poche d'eau dans la mesure où davantage de travail a été fourni au milieu extérieur : l'énergie interne du système a donc diminué de façon plus importante, de même que la température du gaz.

18. On suppose que le transfert thermique nécessaire pour la fonte de la masse m_g de glace ne peut être transmise que par l'intermédiaire de la plaque en laiton. La poche d'eau à une extrémité de la plaque - du fait de sa capacité calorifique et sa masse élevées - se comporte comme un thermostat maintenu à la température ambiante $T_{\text{eau}} = 25^\circ\text{C}$. De même, l'autre extrémité du laiton est en contact avec de la glace à la température $T_g = 0^\circ\text{C}$, de sorte qu'il s'établisse un flux thermique de la poche d'eau vers le glaçon : on pourra alors noter que ce flux aura pour effet de faire fondre le glaçon sans que la température de l'extrémité ne soit modifiée puisque tout changement d'état de corps a lieu à température constante à pression constante ; de fait l'échantillon de glace se comporte également comme un thermostat à la température T_g .

En supposant que la régime stationnaire s'instaure quasiment instantanément, on peut appliquer l'analogie électro-thermique pour évaluer le flux thermique Φ_{th} à travers le laiton. Par analogie avec la loi d'Ohm,

$$T_{\text{eau}} - T_g = R_{th} \Phi_{th}$$

$$\Phi_{th} = \frac{T_{\text{eau}} - T_g}{R_{th}}$$

On considère le système {glace}. D'après le premier principe de la thermodynamique, le transfert thermique $Q_f = \Phi_{th} \Delta t_3$ nécessaire à la fonte de la masse m_g de glace peut s'exprimer :

$$\Delta U = Q_f$$

$$m_g \ell_f = \Phi_{th} \Delta t_3$$

Finalement,

$$\Delta t_3 = \frac{m_g \ell_f R_{th}}{T_{\text{eau}} - T_g}$$

Application numérique.

$$\Delta t_3 \approx 42 \text{ s}$$

IV Bille, fluide et balance

19. Une balance ne mesure pas directement une masse mais la résultante des forces exercées sur son plateau de pesée, qui assimilée au poids permet de remonter à une masse. Lorsque la tare est effectuée avant l'entrée de la bille dans le liquide, la force exercée sur la balance correspond au poids du fluide et de son contenant et devient ainsi la référence de mesure.

Considérons le système {bille} à partir de son entrée dans le fluide. La bille est soumise à son poids \vec{P} et aux actions du fluide sur la bille $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{bille}}$. $\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{bille}}$ se décompose en deux contributions : la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et à la force de frottements fluides \vec{f} . Par principe des actions réciproques appliqué au système {fluide}, le fluide est soumis, en plus de son poids \vec{P}_f , à l'opposée de la résultante des forces exercées par le fluide sur la bille, c'est-à-dire $\vec{F}_{\text{bille} \rightarrow \text{fluide}} = -\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{bille}} = -\vec{\Pi} - \vec{f}$. La variation de masse Δm indiquée par la balance à l'entrée de la bille dans le fluide est due à la résultante des forces exercées par la bille sur le fluide $\vec{F}_{\text{bille} \rightarrow \text{fluide}}$ s'exprime, avec v la vitesse verticale de chute de la bille :

$$\Delta m(t) = \frac{F_{\text{bille} \rightarrow \text{fluide}}}{g} = \frac{\Pi + f}{g} = \frac{4}{3} \pi r_b^3 \rho_e + \frac{\beta v(t)}{g}$$

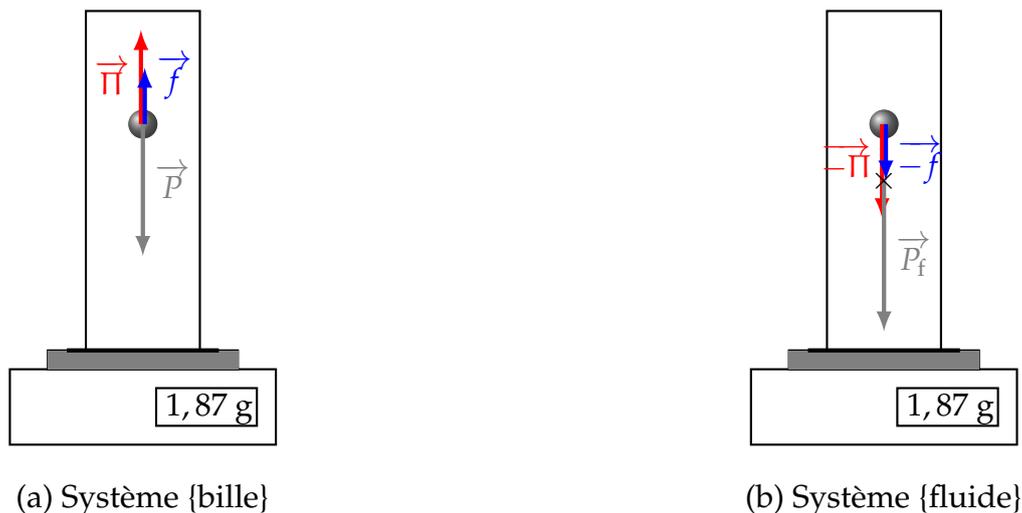


FIGURE 3 – Bilan des forces exercées sur la bille et sur le fluide.

L'énoncé signale un déclenchement à partir d'une variation de l'indicateur de masse de $0,92 \text{ mg}$, ce qui correspond à la limite de sensibilité de la plupart des balances : il s'agit probablement d'une erreur d'énoncé. La valeur de déclenchement $\Delta m_0 = 0,92 \text{ g}$ est sans doute à privilégier.

Par définition et en négligeant le temps de réponse de la balance,

$$\Delta m(\Delta t_4) = \frac{4}{3} \pi r_b^3 \rho_e + \frac{\beta v(\Delta t_4)}{g} = \Delta m_0 = 0,92 \text{ g}$$

Pour déterminer Δt_4 , il est donc nécessaire de connaître l'évolution temporelle de la vitesse de chute de la bille v .

On considère donc à nouveau le système {bille} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On paramétrise le mouvement de la bille à l'aide d'un axe (Oz) vertical orienté vers le bas dont l'origine correspond au point d'entrée de la bille dans le fluide. Compte tenu du bilan des forces s'exerçant sur la bille et d'après la seconde loi de Newton projetée sur l'axe (Oz),

$$\frac{4}{3} \pi r_b^3 \rho_a \ddot{z} = \frac{4}{3} \pi r_b^3 (\rho_a - \rho_e) g - \beta \dot{z}$$

On obtient alors une équation différentielle du premier ordre en $v \equiv \dot{z}$:

$$\dot{v} + \frac{1}{\tau} v = \frac{\rho_a - \rho_e}{\rho_a} g \quad \text{de temps caractéristique} \quad \tau = \frac{4}{3} \frac{\pi r_b^3 \rho_a}{\beta} \approx 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

En prenant en compte la condition initiale $v(t=0) = 0$, on en déduit l'évolution temporelle de la vitesse de la bille :

$$v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \quad \text{avec} \quad v_\infty = \frac{4}{3} \frac{\pi r_b^3 (\rho_a - \rho_e) g}{\beta} \approx 1,6 \cdot 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Connaissant désormais l'évolution temporelle de la vitesse de la bille, on peut accéder au temps de déclenchement du dispositif selon :

$$\Delta t_4 = -\tau \ln \left[1 - \frac{g}{v_\infty \beta} \left(\Delta m_0 - \frac{4}{3} \pi \rho_e r_b^3 \right) \right]$$

Application numérique.

$$\Delta t_4 \approx 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

V Rails de Laplace

20. La force exercée \vec{f}_r par le réseau sur les électrons est une force de frottements qui a pour effet de freiner les électrons, et ce d'autant plus que leur vitesse v_e est grande.

En absence de cette force de frottements \vec{f}_r , les électrons ne seraient soumis qu'à la force électrostatique $\vec{F}_e = -e\vec{E}_0$ constante. Leur mouvement serait alors uniformément accéléré de sorte à pouvoir atteindre des vitesses supérieures à la célérité de la lumière, ce qui est interdit par un des postulats de la relativité restreinte.

21. On considère le système { électron } dans le référentiel du barreau conducteur, supposé galiléen. Le système est soumis à la force électrostatique \vec{F}_e ainsi qu'à une force de frottements due au réseau \vec{f}_r . D'après la seconde loi de Newton,

$$m_e \vec{v}_e = -e\vec{E}_0 - \beta \vec{v}_e$$

En supposant le régime stationnaire atteint, les électrons admettent une vitesse limite $\vec{v}_{e\infty}$ vérifiant :

$$\vec{v}_{e\infty} = -\frac{e}{\beta} \vec{E}_0$$

On en déduit ainsi l'intensité i du courant circulant dans le barreau :

$$i = \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} = -e n_e a b v_{e\infty} = \boxed{\frac{e^2 n_e a b}{\beta} E_0}$$

22. On considère un électron se déplaçant à la vitesse $\vec{v}_{e\infty}$ dans le barreau. Dès lors que le champ magnétique \vec{B} est non nul, l'électron est soumis à une force magnétique \vec{F}_m vérifiant :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v}_{e\infty} \wedge \vec{B} = -\frac{e^2 E_0 B_0}{\beta} \vec{e}_y$$

Le faisceau d'électrons est donc dévié vers la face avant du parallélépipède de la figure 6 du sujet.

23. Sur la face avant du parallélépipède, des électrons s'accumulent : la face avant est polarisée négativement. Par électroneutralité du barreau, force est d'admettre la présence d'un déficit de charges négatives au niveau de la face arrière, qui est donc polarisée positivement. Ces charges surfaciques, à l'image d'un condensateur plan, vont être à l'origine d'une champ électrostatique dit de Hall et noté \vec{E}_H orienté selon $-\vec{e}_y$.
24. En prenant en compte le champ de Hall, on se rend compte que les électrons sont soumis à une force électrostatique \vec{F}_{eH} due au champ de Hall opposée à la force magnétique \vec{F}_m . En régime permanent, ces forces se compensent de sorte que les électrons ne soit formellement soumis qu'au champ électrostatique \vec{E}_0 . La figure 4 résume le dynamique électronique en régime permanent.

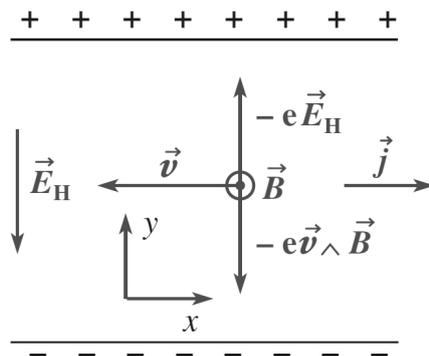


FIGURE 4 – Origine de l'effet Hall - Étude en régime permanent.

Ainsi, la cinématique des électrons n'est pas modifiée en régime permanent en présence d'un champ magnétique \vec{B}_0 par rapport à la situation en absence de champ magnétique \vec{B}_0 : l'expression donnant l'intensité du courant obtenue à la question 21 demeure valable en présence d'un champ magnétique \vec{B}_0 et en régime permanent.

25. On pose N le nombre d'électrons au sein du barreau. Par définition de $\vec{F}_{p/e}$, on peut écrire $\vec{F}_{p/e} = -e N \vec{E}_H$. Or, en régime permanent et pour un électron,

$$\vec{F}_{eH} + \vec{F}_m = -e \vec{E}_H - e \vec{v}_{e\infty} \wedge \vec{B}_0 = \vec{0}$$

d'où

$$\vec{E}_H = -\vec{v}_{e\infty} \wedge \vec{B}_0 = -v_{e\infty} B_0 \vec{e}_y = -\frac{B_0 i}{n_e e a b} \vec{e}_y$$

Par définition, $n_e = \frac{N}{L a b}$ de sorte qu'on en déduit :

$$\boxed{\vec{F}_{p/e} = B_0 i L \vec{e}_y}$$

26. On appelle force de Laplace la résultante des forces électromagnétiques sur un élément conducteur. Pour un élément conducteur de volume $d\tau$ parcouru par un courant de vecteur densité \vec{j} , placé dans un champ magnétique \vec{B} , la force de Laplace s'exprime sous la forme :

$$d\vec{F}_L = \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau$$

Soit \vec{F}_L la force de Laplace appliquée au barreau de volume V .

$$\begin{aligned} \vec{F}_L &= \iiint_V \vec{j} \wedge \vec{B}_0 d\tau = - \iiint_V B_0 j d\tau \vec{e}_y \\ &= -B_0 j L a b \vec{e}_y \\ &= -B_0 i L \vec{e}_y \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\vec{F}_{p/e} = -\vec{F}_L}$, ce qui n'a rien de surprenant puisque $\vec{F}_{p/e}$ désigne la force exercée par le barreau sur les électrons à l'origine du champ \vec{E}_H alors que \vec{F}_L correspond au contraire à l'effet de ce champ sur le barreau.

27. En appliquant une différence de potentiel aux extrémités d'un barreau conducteur, le champ électrostatique créé permet la mise en mouvement des électrons libres à l'origine d'un courant électrique. En mettant en place un champ magnétique orthogonal au courant électrique, on dévie les électrons vers une paroi du barreau à l'origine de sa polarisation, à l'image d'un condensateur plan, si bien qu'il en résulte un champ électrostatique supplémentaire dit de Hall, dont l'effet est de contrer exactement la déviation des électrons libres du fait du champ magnétique. Les forces électromagnétiques exercées sur les électrons résultent également, d'après le principe des actions réciproques, en une force dite de Laplace, qui s'exerce sur le barreau, et qui est le reflet de la résultante des forces électromagnétiques qui s'y appliquent.
28. Considérons un fil de cuivre d'une habitation conçu pour y faire circuler des courants $i \sim 1$ A et dont le rayon r est de l'ordre de $r \sim 1$ mm.

Par définition de la vitesse de déplacement des électrons v_e ,

$$i = n_e e S v_e = n_e e \pi r^2 v_e$$

d'où

$$v_e = \frac{i}{n_e e \pi r^2} \sim 10^{-5} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse quadratique moyenne v_q des électrons peut être estimée via :

$$\frac{1}{2} m v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$v_q = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} \sim 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse de déplacement de l'ensemble des électrons est bien plus faible que la vitesse des électrons entre deux chocs dus au réseau, ce qui laisse suggérer que ces chocs sont très fréquents.

29. D'après la loi de modération de Lenz, le courant induit, par ses effets, s'oppose à la cause qui lui a donné naissance : de fait, le courant induit - dont le sens de circulation est représentée à la figure 7 du sujet - engendrera un champ magnétique induit $\vec{B}_{\text{ind}} = -B_{\text{ind}} \vec{e}_z$, qui s'oppose au champ $\vec{B} = B \vec{e}_z$ mis en place dans l'espace.
30. D'après la loi de Faraday, tout circuit en mouvement dans un champ magnétique \vec{B} constant voit naître en son sein une force électromotrice induite e dont la valeur, en convention générateur, est liée aux variations temporelles du flux Φ_B du champ magnétique à travers le circuit :

$$e = - \frac{d \Phi_B}{d t}$$

Le circuit équivalent est donné en figure 5.

Or, le flux du champ magnétique à travers le circuit s'exprime selon :

$$\Phi_B = \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = - B \cos \alpha d_r w$$

d'où

$$e = B \cos \alpha d_r \dot{w} = B \cos \alpha d_r v$$

Compte tenu des orientations du circuit,

$$u_c = B \cos \alpha d_r v$$

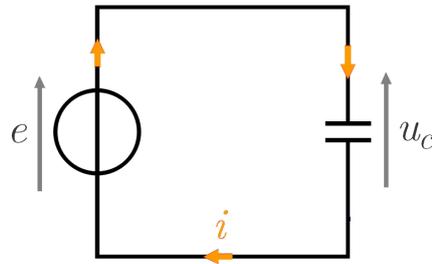


FIGURE 5 – Circuit électrique équivalent au dispositif des rails de Laplace.

31. On note \vec{F}_L la force de Laplace qui s'exerce sur la totalité du barreau placé sur les rails. Dans la mesure où la section du fil est négligeable devant la longueur du barreau, on privilégiera une modélisation linéique plutôt que volumique.

$$\begin{aligned}\vec{F}_L &= \iiint_V \vec{j} \wedge \vec{B} \, d\tau = \int i \, d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= \int_0^{d_r} i \, dx \, \vec{e}_x \wedge B \, \vec{e}_z \\ &= -i \, d_r \, B \, \vec{e}_y\end{aligned}$$

La composante F_{Lw} de la force de la Laplace dans la direction des rails est donnée par :

$$F_{Lw} = \vec{F}_L \cdot \vec{e}_w = -i \, d_r \, B \, \cos \alpha$$

32. On considère le système {barreau} dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Le système est soumis à son poids \vec{P} ainsi qu'à la force de Laplace \vec{F}_L . D'après la seconde loi de Newton projetée selon l'axe $(O'w)$,

$$m_e \frac{d^2 w}{dt^2} = m_e g \sin \alpha - i \, d_r \, B \cos \alpha$$

Or, d'après le circuit électrique équivalent, pour le condensateur en convention récepteur :

$$i = C \frac{d u_c}{dt} = C B \cos \alpha \, d_r \frac{d v}{dt} = C B \cos \alpha \, d_r \frac{d^2 w}{dt^2}$$

En reportant l'expression de i dans l'équation mécanique, on obtient finalement :

$$(m_e + m') \frac{d^2 w}{dt^2} = m_e g \sin \alpha \quad \text{en posant} \quad m' = C (B \cos \alpha \, d_r)^2$$

33. La **masse inertielle** m_i fait directement référence à l'inertie, c'est-à-dire la vocation qu'à un corps en mouvement à vouloir conserver ce mouvement ou un corps immobile à le rester sous l'action d'une interaction extérieure au corps : la masse inertielle intervient dans la seconde loi de Newton $m_i \vec{a} = \vec{F}$. Supposons que l'on applique une force identique \vec{F} à un corps de masse inertielle élevée et à un corps de masse inertielle faible, sa capacité à modifier son mouvement se lit dans son accélération $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_i}$: ainsi, plus sa masse inertielle est faible, plus son inertie est faible et plus son mouvement est aisément modifiable.

La **masse gravitationnelle** m_g fait, quant à elle, référence à la loi de la gravitation de Newton, qui s'exprime généralement sur Terre sous la forme $\vec{P} = m_g \vec{g}$. La masse gravitationnelle permet de quantifier l'amplitude de l'attraction gravitationnelle sans pour autant prendre en compte le mouvement des corps contrairement à la masse inertielle.

Ainsi, formellement, lorsqu'on écrit la seconde loi de Newton dans le cas d'une chute libre, on devrait spécifier $m_i \vec{a} = m_g \vec{g}$ de sorte que la simplification aboutissant à $\vec{a} = \vec{g}$ suppose d'admettre $m_i = m_g$: ce résultat n'est autre que le principe non trivial d'équivalence masse inertielle-masse gravitationnelle.

On peut étendre cette étude au barreau des rails de Laplace en annotant les différentes masses intervenant dans l'équation différentielle en w .

$$(m_{e1} + m'_2) \frac{d^2 w}{dt^2} = m_{e3} g \sin \alpha \quad \text{avec} \quad m'_2 = C (B \cos \alpha d_r)^2$$

Compte tenu des remarques précédentes, m_{e1} est de nature inertielle tandis que m_{e3} est de nature gravitationnelle. La position du terme m'_2 au sein de l'équation invite également à le considérer comme étant de nature inertielle. m'_2 prend en compte la présence du condensateur, dipôle connu pour s'opposer aux variations de tension en imposant un courant : de fait, le condensateur s'oppose à l'installation d'une force électromotrice, ce que confirme la contribution inertielle du terme m'_2 .

34. Contrairement au condensateur ($i = C \frac{du_c}{dt}$), la résistance répond linéairement ($i = \frac{u_R}{R}$) et donc sans s'opposer à l'installation d'une force électromotrice : la résistance n'a donc pas d'effet inertielle. En revanche, la résistance aura un effet dissipatif contrairement au condensateur.
35. L'évolution temporelle de la tension u_c est directement corrélée à l'évolution de $v \equiv \frac{dw}{dt}$. L'équation différentielle en w admet pour solution :

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{m_e g \sin \alpha}{m_e + m'} t$$

On en déduit :

$$u_c = \frac{B \cos \alpha d_r m_e g \sin \alpha}{m_e + m'} t \quad \text{avec} \quad m' = C (B \cos \alpha d_r)^2$$

ce qui justifie la représentation graphique suivante :

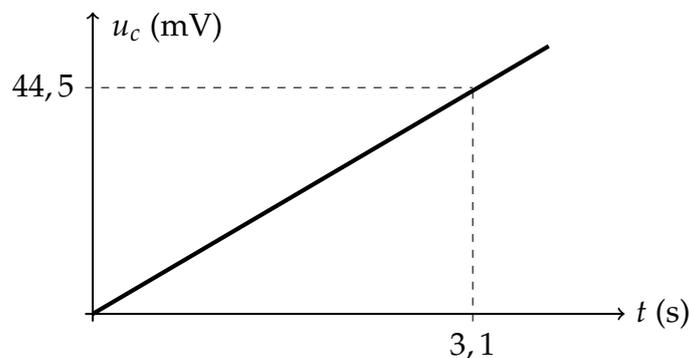


FIGURE 6 – Évolution de la tension aux bornes du condensateur en fonction du temps.

36. On pose $u_{c_0} = 44,5 \text{ mV}$, la tension seuil de déclenchement. La durée Δt_5 écoulée entre l'instant où le barreau est libéré et l'instant où il déclenche l'étape suivante est donnée par :

$$\Delta t_5 = \frac{u_{c_0} (m_e + m')}{B \cos \alpha d_r m_e g \sin \alpha}$$

Application numérique.

$$\Delta t_5 \approx 3,1 \text{ s}$$

VI Ressort et excitateur

37. On note \vec{F} la force de rappel du ressort ainsi que $\ell = z_0 - z > 0$ la longueur du ressort.

$$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)(-\vec{e}_z) = k(z_0 - z - \ell_0)\vec{e}_z$$

38. On considère le système { masse m } dans le référentiel de laboratoire supposé galiléen. La masse est soumise à son poids \vec{P} ainsi qu'à la force de rappel du ressort \vec{F} . On négligera tout frottement. D'après la seconde loi de Newton projetée sur l'axe (Oz),

$$m\ddot{z} = k(z_0 - z - \ell_0) - mg$$

$$\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}(z_0 - \ell_0) - g$$

En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on a :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 (z_0 - \ell_0) - g$$

39. On suppose que le vibreur est au repos, c'est-à-dire $z_0 = 0$. On note z_e la position d'équilibre de l'objet avant la mise en route du vibreur, vérifiant $\ddot{z} = 0$ de sorte que :

$$\omega_0^2 z_e = -\omega_0^2 \ell_0 - g$$

Finalement,

$$z_e = -\ell_0 - \frac{g}{\omega_0^2} = -\ell_0 - \frac{mg}{k}$$

40. On définit $Z = z - z_e$ la position relative de l'objet. En remarquant que $\ddot{Z} = \ddot{z}$ et que l'équation différentielle en z peut s'écrire :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 (z - z_e) = \omega_0^2 z_0$$

On en déduit :

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_0$$

41. Les conditions initiales vérifiées par Z et $\frac{dZ}{dt}$ sont :

$$Z(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dZ}{dt}(t=0) = 0$$

42. L'équation différentielle à résoudre est la suivante :

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_0$$

Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent sous la forme :

$$Z(t) = Z_h(t) + Z_p(t)$$

avec Z_h les solutions générales de l'équation différentielle homogène et Z_p une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

On peut d'ores et déjà expliciter les solutions de l'équation différentielle homogène :

$$Z_h(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

où A et B sont des constantes réelles à expliciter à partir des conditions initiales.

Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre peut être obtenue en exploitant le formalisme complexe. Il convient néanmoins de signaler que le formalisme complexe ne permet d'obtenir que la partie stationnaire du régime sinusoïdal forcé : si dans le cas présent, il n'y a pas de régime transitoire dans la mesure où il n'y a pas d'amortissement, la méthode n'est pas transposable pour toute équation différentielle de second ordre à coefficients constants et à second membre non nul.

On cherche une solution complexe sous la forme $\underline{Z}(t) = \underline{Z} e^{i\omega t}$ où \underline{Z} est le module complexe de Z . On réécrit l'équation différentielle avec second membre sous sa forme complexe :

$$\ddot{\underline{Z}}(t) + \omega_0^2 \underline{Z}(t) = \omega_0^2 a e^{i\omega t}$$

de sorte à pouvoir expliciter une solution réelle selon :

$$Z(t) = \mathcal{I}m [\underline{Z}(t)] = |\underline{Z}| \sin[\omega t + \arg(\underline{Z})]$$

En reportant dans l'équation différentielle complexe,

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \omega^2) \underline{Z} &= \omega_0^2 a \\ \underline{Z} &= \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

On en déduit ainsi une solution particulière complexe

$$\underline{Z}_p(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} e^{i\omega t}$$

ainsi que sa forme réelle :

$$Z_p(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

Les solutions de l'équation différentielles s'écrivent donc :

$$Z(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) + A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

où A et B restent à expliciter à partir des conditions initiales.

Comme $Z(t = 0) = A = 0$, on en déduit que $A = 0$, de sorte que $Z(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t) + B \sin(\omega_0 t)$. De plus,

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \omega \cos(\omega t) + B \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

À nouveau, comme $\frac{dZ}{dt}(t = 0) = 0$, on en déduit que $B = -\frac{\omega_0 \omega a}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

Finalement, l'évolution temporelle de la position relative Z de l'objet est donnée par :

$$Z(t) = \frac{\omega_0 a}{\omega_0^2 - \omega^2} [\omega_0 \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_0 t)]$$

43. On suppose que $\omega \approx \omega_0$ avec $\omega > \omega_0$. L'évolution temporelle de la position relative Z de l'objet se simplifie alors :

$$Z(t) = \frac{\omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} [\sin(\omega t) - \sin(\omega_0 t)]$$

Compte tenu du formulaire trigonométrie, on peut écrire :

$$Z(t) = \frac{2 \omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos\left(\frac{\omega + \omega_0}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega - \omega_0}{2} t\right)$$

Finalement, en prenant en compte le fait que $Z = z - z_e$ ainsi que le fait que $\omega + \omega_0 \approx 2 \omega_0$, on en déduit :

$$z(t) = z_e + A(\omega) \cos(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) \quad \text{en posant} \quad A(\omega) = \frac{2 \omega_0^2 a}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \omega_1 = \omega_0 \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{\omega - \omega_0}{2}$$

44. Le suivi de la position de la masse présente bien une évolution temporelle modélisable par un produit de deux fonctions trigonométriques de pulsations différentes. L'enveloppe présente une longue période et correspond donc à la plus faible pulsation, notée ω_2 . On en déduit ainsi que les oscillations au sein de l'enveloppe sont dues au terme de pulsation élevée ω_1 .

Expérimentalement, on peut relever qu'une unique période du signal de pulsation ω_2 de sorte à pouvoir encadrer la période $T_2 = (24 \pm 1)$ s. Au contraire, pour le signal de pulsation ω_1 , on relève $p = 24$ périodes sur une durée $\Delta t = (24 \pm 1)$ s de sorte à réduire l'incertitude sur la période $T_1 = \frac{\Delta t}{p} = (1,00 \pm 0,05)$ s.

Les pulsations ω_1 et ω_2 ainsi que leur incertitude - par propagation - s'en déduisent. À noter que les incertitudes relatives sont conservées, ce que permet d'évaluer l'incertitude sur ω à partir de l'incertitude sur T .

$$\omega_1 = \frac{2 \pi}{T_1} = (6,3 \pm 0,3) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{2 \pi}{T_2} = (0,26 \pm 0,01) \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

45. L'allure de la courbe de position de la masse au cours du temps est caractéristique d'un **phénomène de battements** : ce phénomène se manifeste à proximité de la résonance d'un système mécanique ou électrique ou lorsque deux ondes de pulsations proches se superposent. Les applications d'un tel phénomène sont nombreuses : on peut exploiter les battements pour déterminer par interférométrie la largeur de la raie D du sodium, c'est-à-dire l'écart de fréquence entre les deux radiations qui la compose. Les battements permettent également de mesurer des vitesses par effet Doppler : la superposition des ondes ultrasonore incidente et réfléchi est à l'origine de battements dont la mesure de la plus faible pulsation permet de remonter à la vitesse de l'objet.

46. Si l'objet oscillant est placé dans du glycérol, il est nécessaire de prendre en compte les frottements fluides sur la masse de sorte que l'équation différentielle régissant la position relative Z de l'objet s'écrive sous la forme :

$$\ddot{Z} + 2\lambda \dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_0$$

Le système sera donc soumis dans un premier temps à un régime transitoire qui présente un amortissement (sous la forme $e^{-t/\tau}$ avec τ le temps caractéristique du régime transitoire) et au cours duquel on pourra observer quelques battements : la position de la masse Au delà du régime transitoire, un régime stationnaire harmonique s'installera sans aucun battement.

47. Par lecture graphique, on peut estimer la durée Δt_6 entre le début du mouvement du ressort et la première fois que les cordes sont frottés :

$$\Delta t_6 = (3,3 \pm 0,2) \text{ s}$$

VII Cordes vibrantes

48. La perturbation et son sens de propagation sont orthogonaux dans une corde : on parle d'**ondes transversales**.

49. On note $v_z(x, t)$ la vitesse du point M de la corde repéré par l'abscisse x . Par définition,

$$v_z(x, t) \equiv \frac{dz(x, t)}{dt}$$

La quantité de mouvement d'un morceau de corde situé entre les abscisses x et $x + dx$ s'exprime alors :

$$\vec{dp} = \mu dx v_z \vec{e}_z = \mu dx \frac{\partial z}{\partial t} \vec{e}_z$$

50. Par définition de ϕ et dans la limite des petits angles $\tan \phi \approx \phi$,

$$\tan [\phi(x, t)] \approx \phi(x, t) \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x, t)$$

51. Par définition de $\vec{T}(x, t)$,

$$\vec{T}(x, t) = T \left(\cos [\phi(x, t)] \vec{e}_x + \sin [\phi(x, t)] \vec{e}_z \right)$$

Dans l'hypothèse des petits angles, $\cos \phi \approx 1$ et $\sin \phi \approx \phi$, d'où :

$$\vec{T}(x, t) \approx T \left(\vec{e}_x + \phi(x, t) \vec{e}_z \right)$$

On en déduit ainsi que $T_x(x, t) = T$, la composante horizontale de $\vec{T}(x, t)$, en tout point de la corde. Pour ce qui est de la composante verticale $T_z(x, t)$,

$$T_z(x, t) \approx T \phi(x, t) \vec{e}_z \approx T \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) \vec{e}_z$$

52. On considère un {morceau de corde entre x et $x + dx$ } dans le référentiel de laboratoire supposé galiléen. En négligeant le poids, le morceau de corde n'est soumis qu'aux forces de tension de la corde exercées aux extrémités gauche $\vec{T}_g = -\vec{T}(x, t)$ (par principe des actions réciproques) et droite $\vec{T}_d = \vec{T}(x + dx, t)$. D'après la seconde loi de Newton projetée sur (Oz) ,

$$\begin{aligned} \mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= T_z(x + dx, t) - T_z(x, t) \\ \mu dx \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= T \left(\frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) \right) \end{aligned}$$

Par développement de Taylor,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) \approx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) dx$$

de sorte à pouvoir réécrire le principe fondamental de la dynamique sous la forme d'une équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad \text{en posant} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

c désigne la célérité de l'onde qui se propage dans la corde, ce que l'on peut vérifier par analyse dimensionnelle :

$$[c] = \left[\sqrt{\frac{T}{\mu}} \right] = \left(\frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{M} \cdot \text{L}^{-1}} \right)^{1/2} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

53. La forme de la solution proposée correspond à une **onde plane monochromatique (ou harmonique)**, c'est-à-dire à dépendance temporelle sinusoïdale. Ce choix se justifie par le fait que toute onde plane solution de l'équation de D'Alembert peut être **approchée par une somme d'ondes planes monochromatiques**, d'après les propriétés des développements de Fourier.
54. En reportant la forme de la solution proposée dans l'équation de D'Alembert sous sa forme complexe, on a :

$$\frac{dU}{dx}(x) e^{-i\omega t} + \frac{(-i\omega)^2}{c^2} U(x) e^{-i\omega t} = 0$$

de sorte que U vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{dU}{dx}(x) + \frac{\omega^2}{c^2} U(x) = 0$$

55. La nature des solutions de la forme $e^{r x}$ impose, en simplifiant par $e^{r x}$:

$$r^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$r_{\pm} = \pm i \frac{\omega}{c}$$

On en déduit la forme générale des solutions de l'équation différentielle en U :

$$U(x) = A e^{i \frac{\omega}{c} x} + B e^{-i \frac{\omega}{c} x}$$

de sorte que les solutions $\underline{z}(x, t)$ s'écrivent sous la forme :

$$\underline{z}(x, t) = A e^{i(\frac{\omega}{c} x - \omega t)} + B e^{-i(\frac{\omega}{c} x + \omega t)}$$

soit encore, en posant $k = \frac{\omega}{c}$:

$$\underline{z}(x, t) = \underbrace{A e^{i(kx - \omega t)}}_{\text{onde se propageant vers les } x \text{ positifs}} + \underbrace{B e^{-i(kx + \omega t)}}_{\text{onde se propageant vers les } x \text{ négatifs}}$$

Les solutions planes harmoniques de l'équation de D'Alembert prennent la forme d'une superposition de deux ondes progressives planes monochromatiques de sens de propagation opposés, de périodicité spatiale donnée par le vecteur d'onde $\vec{k} = k \vec{e}_x$ avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et de périodicité temporelle donnée par la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

56. En reportant la forme de la solution proposée dans l'équation différentielle en U , on a :

$$-k^2 [A \cos(kx) + B \sin(kx)] + \frac{\omega^2}{c^2} [A \cos(kx) + B \sin(kx)] = 0$$

d'où la relation de dispersion :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Ainsi, les solutions réelles $z(x, t)$ sont de la forme :

$$z(x, t) = \mathcal{Re} [\underline{z}(x, t)] = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

De telles solutions réelles $z(x, t) = F(x) G(t)$ avec séparation des variables sont dites **stationnaires** : elles décrivent des phénomènes oscillants sans propagation.

57. Dans la mesure où la corde est attachée à ses deux extrémités, les conditions aux limites sont imposées ce qui fait des ondes stationnaires le type d'ondes le plus adapté à décrire le système, contrairement aux ondes progressives, qui se propagent. On a en effet pour habitude d'observer des phénomènes oscillants avec des ventres et des noeuds dès lors que la corde a été éloignée de sa position d'équilibre, ce que décrivent parfaitement les ondes stationnaires.

La question est quelque peu maladroite dans la mesure où des ondes stationnaires peuvent être décrite par la superposition de deux ondes progressives en phase de même amplitude mais de sens de propagation opposés.

58. Compte tenu de la description du dispositif, les conditions aux limites se résument par :

$$z(x = 0, t) = z_{max} \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad z(x = L, t) = 0$$

La condition aux limites à l'extrémité en $x = 0$ se traduit par :

$$z(x = 0, t) = A \cos(\omega' t) = z_{max} \cos(\omega t)$$

ce qui impose le fait que la pulsation de l'onde ω' soit identique à la pulsation du vibreur ω ainsi que $A = z_{max}$. La condition aux limites en $x = L$, quant à elle, permet d'explicitier B :

$$\begin{aligned} z(x = L, t) &= [z_{max} \cos(kL) + B \sin(kL)] \cos(\omega t) = 0 \\ z_{max} \cos(kL) + B \sin(kL) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $B = -z_{max} \cotan(kL)$ de sorte que les solutions stationnaires du système s'écrive :

$$z(x, t) = z_{max} [\cos(kx) - \cotan(kL) \sin(kx)] \cos(\omega t)$$

59. Les solutions stationnaires précédentes ne sont pas définies pour toute pulsation ω du fait du facteur en $\cotan(kL) = \frac{\cos(kL)}{\sin(kL)}$. Les pulsations en cause sont :

$$\begin{aligned} \sin(kL) = 0 &\Leftrightarrow k_n L = n\pi \\ &\Leftrightarrow \frac{\omega_n}{C} L = n\pi \end{aligned}$$

Finalement,

$$\omega_n = \frac{n\pi C}{L}$$

Pour de tels pulsations ω_n , on observe un **phénomène de résonance**.

60. D'après le modèle développé, l'amplitude des mouvements de la corde devrait diverger aux pulsations de résonance. En pratique, si l'amplitude y est en effet maximale par rapport à d'autres fréquences, les phénomènes dissipatifs (élasticité de la corde, frottements de l'air) empêchent toute divergence. Pour autant, la résolution analytique prenant en compte ces phénomènes correctifs serait bien plus complexe.

61. La corde étant désormais fixée aux deux extrémités, les conditions aux limites sont ainsi modifiées :

$$z(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad z(x = L, t) = 0$$

Compte tenu de la condition en $x = 0$, on en déduit $A = 0$ de sorte que z puisse s'écrire $z(x, t) = z_0 \sin(kx) \cos(\omega t)$. La condition en $x = L$ permet d'explicitier et quantifier les modes propres via $\sin(kL) = 0$: il se trouve qu'il s'agit des mêmes pulsations que celles explicitées précédemment à la question 59. Ainsi, les fréquences $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$ et les longueurs d'onde $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n}$ des vibrations propres sont :

$$f_n = \frac{nC}{2L} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Corde		1	2	3
Longueur		$L = 63 \text{ cm}$	$\frac{4}{5} L = 50 \text{ cm}$	$\frac{2}{3} L = 42 \text{ cm}$
Fondamental (Hz)	$n = 1$	281	351	421
Harmoniques (Hz)	$n = 2$	561	701	842
	$n = 3$	842	-	-

TABLE 1 – Composition spectrale de l'entrée en vibration des trois cordes.

	Fondamental	Harmoniques	Fréquences communes avec la référence
Son de référence	f_0	$n \cdot f_0$	/
Son séparé d'une quinte	$\frac{3}{2} f_0$	$f_k = \frac{3}{2} k \cdot f_0$	$\frac{3}{2} k = n$
Son séparé d'une quarte	$\frac{4}{3} f_0$	$f_\ell = \frac{4}{3} \ell \cdot f_0$	$\frac{4}{3} \ell = n$

TABLE 2 – Composantes spectrales communes entre deux sons.

62. L'équation de D'Alembert est une équation différentielle linéaire. Ainsi, par théorème de superposition, toute somme de fonctions solutions est également solution de l'équation. Autrement, toute superposition d'ondes stationnaires est également une onde solution de l'équation de D'Alembert.
63. Les modes propres ne sont pas cantonnés aux cordes vibrantes. On en rencontre également lorsqu'on a affaire à des tuyaux dans lesquels vibrent des couches d'air ou encore dans le cas d'oscillateurs mécaniques couplés.
64. La composition spectrale issue de l'entrée en vibration des trois cordes est résumée dans le tableau ci-dessous :
65. Considérons un son de fréquence fondamentale f_0 . La composition spectrale d'un tel son comprend donc tous les fréquences $f_n = n \cdot f_0$.
 Pour un autre son séparé d'une octave par rapport au premier, sa fréquence fondamentale est donc $2 f_0$ de sorte que la composition spectrale d'un tel son comprenne les fréquences $f_m = 2 m \cdot f_0$. Ainsi, seules les fréquences f_n et f_m vérifiant $n = 2 m$ sont communes aux deux sons.
 On peut réitérer ce raisonnement pour des sons séparés d'une quinte ou d'une quarte, à l'image de ce qui est proposé dans le tableau 2.
 Pour comparer le caractère harmonieux des différents sons deux à deux, on peut lister les premières composantes fréquentielles de chaque son pour se rendre compte des fréquences communes : on peut alors aisément établir le fait que deux sons séparés d'une octave sont bien plus harmonieux que ceux séparés d'une quinte, lesquels le sont davantage encore que ceux séparés d'une quarte.
66. La perfection d'un son est liée au fait que les fréquences composant le son émis par les trois cordes soient reliées par des rapports égaux à des fractions de nombres entiers simples : on se propose de le vérifier à travers le tableau 3.
 On retrouve une grande diversité d'intervalles qui relie les différentes notes émises par les trois cordes, ce qui en fait un son particulièrement harmonieux qu'on qualifie d'accord parfait.
67. L'air étant composé à une large majorité de diazote et de dioxygène, on peut le modéliser par un

Fréquence 1 (Hz)	Fréquence 2 (Hz)	Rapport	Type d'intervalle
842 [3]	842 [1]	1/1	unisson
842 [1]	421 [3]	2/1	octave
561 [1]	351 [2]	8/5	sixte mineure
701 [2]	421 [3]	5/3	sixte majeure
842 [3]	561 [1]	3/2	quinte
421 [3]	281 [1]	3/2	quinte
561 [1]	421 [3]	4/3	quarte
701 [2]	561 [1]	5/4	tierce majeure
351 [2]	281 [1]	5/4	tierce majeure
842 [1 ou 3]	701 [2]	6/5	tierce mineure
421 [3]	351 [2]	6/5	tierce mineure

TABLE 3 – Etude du caractère parfait de l'accord des trois cordes. On note entre crochets la corde émettant le son.

gaz diatomique de composition 80/20 en diazote/dioxygène. Sa masse molaire s'en déduit :

$$M = 0,8 M_{\text{N}_2} + 0,2 M_{\text{O}_2} \approx 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On peut ainsi estimer la célérité de l'onde sonore dans l'air à

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} = 3,5 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{en prenant} \quad \gamma = 1,4$$

68. La distance d qui sépare la personne dans la pièce et les cordes est de l'ordre de quelques mètres : prenons donc $d = 3 \text{ m}$. La durée Δt de propagation du son des cordes vers la personne peut être estimée à $\Delta t = \frac{d}{c_s} \sim 10^{-2} \text{ s}$: ce temps est bien inférieur au temps de réaction auditive permettant la perception de l'ordre de 0,2 s. Ainsi la durée Δt_7 écoulée entre le moment où le bâtonnet frotte la corde et le moment où il est perçu peut être estimé à

$$\Delta t_7 = 0,2 \text{ s}$$

VIII Machine de Rube Goldberg

69. La durée Δt écoulée entre l'ouverture de la porte et la perception du son peut être estimée selon

$$\Delta t = \sum_{i=1}^7 \Delta t_i = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots + \Delta t_7$$

Pour autant, la précision sur les différentes durées Δt_i n'est identique pour des différentes valeurs et dans certains cas des temps de latence ou des phénomènes dissipatifs ralentissent le déclenchement du dispositif suivant ne sont pas pris en compte ; c'est pourquoi seule une estimation de la durée Δt n'est possible.

Compte tenu des incertitudes sur les contributions majoritaires - à savoir Δt_3 -, un résultat avec une précision supérieure à la seconde serait dénué de sens. On peut donc estimer la durée Δt à

$$\Delta t \approx 49 \pm 1 \text{ s}$$

70. À travers l'étude d'une telle machine de Rube Goldberg, différents modes de transfert de l'information ont été mis en oeuvre :
- un **transfert mécanique** dans le cas du pendule, de la poulie, de la libération du piston, de l'oscillation forcée de la masse ainsi que la mise en vibration des cordes puis de l'air ;
 - un **transfert électrocinétique** dans le cas de l'allumage de la lampe et du suivi de la tension du condensateur ;
 - un **transfert électromagnétique** dans le cas de la propagation de l'onde lumineuse vers la photodiode ;
 - un **transfert thermique** lors de la diffusion thermique à travers le laiton.
- Le transfert thermique correspond au mode de transfert le plus lent et est donc le facteur limitant à la rapidité de réponse de la machine de Rube Goldberg.
71. Avec un tel temps de réponse, les applications d'une telle machine de Rube Goldberg sont limitées mais à supposer qu'on puisse le réduire, elle pourrait signaler une effraction dans une maison.
72. Différents modèles ont été exploités dans le cadre de cette étude :
- le modèle de la **mécanique galiléenne du point** pour l'étude du pendule simple, de la chute dans un fluide visqueux, de l'oscillateur fixé et des cordes vibrantes ;
 - le modèle de la **mécanique galiléenne du solide** pour l'étude de la poulie ;
 - le modèle de l'**électrocinétique dans le cadre de l'approximation des états quasi stationnaires** ;
 - le modèle du **corps noir** pour étudier les lampes à incandescence ;
 - le modèle du **gaz parfait** ;
 - le modèle de la **diffusion thermique**, qui prend appui sur la théorie de Fourier ;
 - le modèle de l'**électromagnétisme non relativiste**.