

# L'interaction gravitationnelle

Ce corrigé est proposé par Cédric Grange. Si vous voyez des erreurs, envoyez un mail à [agregationchimie#free.fr](mailto:agregationchimie#free.fr). J'essaierai de les corriger le plus vite possible. Pour contacter l'auteur, vous pouvez envoyer un mail à [cedric.grange#laposte.net](mailto:cedric.grange#laposte.net). (avec un # à la place du #)

Cette correction est mise à disposition selon les termes de la Licence Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 non transposé.

## 1. La gravitation terrestre

### 1.1. Le champ de pesanteur

1.1.1. La Terre est plus aplatie aux pôles. Cet aplatissement est dû à la rotation de la Terre sur elle-même et à la force centrifuge qui en résulte.

Le champ de gravitation est plus faible à l'équateur ; à l'équateur un point de la surface étant plus loin du centre, les masses en sont en moyenne plus éloignées et créent une attraction légèrement plus faible.

1.1.2. Par application du théorème de Gauss :

$$\vec{F}_g = -\frac{G_N M_T m}{R_T^2} \vec{e}_r$$

donc

$$\vec{g}_0 = -\frac{G_N M_T}{R_T^2} \vec{e}_r$$

avec  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire des coordonnées sphériques dirigé du centre de la Terre au point considéré.

1.1.3. A.N. :  $\omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7,27 \times 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$

1.1.4. Influence du caractère non galiléen du référentiel terrestre :

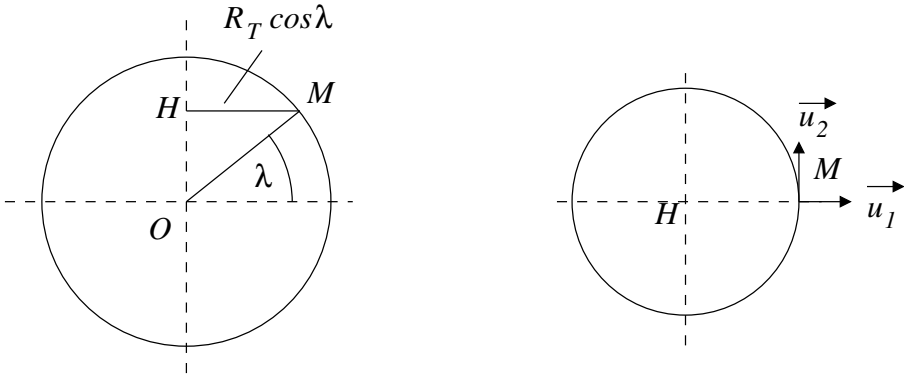
1.1.4.a. Le référentiel géocentrique est le référentiel en translation par rapport au référentiel de Kepler et dont l'origine est confondue avec le centre de la Terre.

1.1.4.b. Dans le référentiel géocentrique, le point  $M$  décrit un cercle de rayon  $r = R_T \times \cos(\lambda)$  le long d'un parallèle terrestre (Cf. schéma ci-dessous).

1.1.4.c.

$$\vec{v} = (R_T \cos \lambda) \omega_T \vec{u}_2$$

$$\vec{a} = -(R_T \cos \lambda) \omega_T^2 \vec{u}_1$$



1.1.4.d. L'expression générale de la force centrifuge est  $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e$ , c'est à dire dans ce cas particulier :

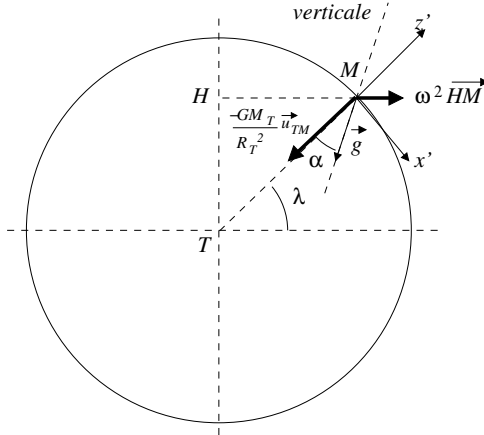
$$\vec{F}_{ie} = mR_T\omega_T^2 \cos \lambda \vec{u}_1$$

Pour une latitude française  $\lambda \simeq 45^\circ$ ,

A.N.  $F_{ie} \simeq 6,4 \times 10^6 \times (7,27 \times 10^{-5})^2 / \sqrt{2} \simeq 0,02 \text{ N}$

Il ne faut pas oublier que M est soumis à la force gravitationnelle attractive d'intensité nettement plus importante (10 N pour une masse de 1 kg) que la force centrifuge.

1.1.4.e. On s'intéresse à l'écart  $\alpha$  entre la verticale (direction donnée par le fil à plomb) et la direction donnée par le champ de gravitation.



$$\vec{g}' = \begin{pmatrix} g_{x'} = \omega_T^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda \\ g_{z'} = \omega_T^2 R_T \cos^2 \lambda - \frac{G_N M_T}{R_T^2} \simeq -\frac{G_N M_T}{R_T^2} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne pour l'angle  $\alpha$  :

$$\tan \alpha = \left| \frac{g_{x'}}{g_{z'}} \right| = \frac{\omega_T^2 R_T \cos \lambda \sin \lambda}{g_0}$$

On évalue alors l'angle  $\alpha$  *via* sa tangente pour une latitude de  $45^\circ$  :

$$\alpha \simeq 1,7 \times 10^{-3} \text{ rad} \simeq 0,1^\circ$$

- 1.1.4.f.** La force supplémentaire est la force d'inertie de Coriolis. Elle se manifeste dans des expériences historiques : déviation vers l'est, pendule de Foucault, comme dans des situations courantes : sens de rotation des masses d'air dans l'atmosphère.

## 1.2. S'échapper de la surface de la Terre

- 1.2.1.** On considère la conservation de l'énergie mécanique entre l'état initial (particule à la surface terrestre lancée avec la vitesse  $v_l$ ) et l'état final (particule à l'infini sans vitesse) :

$$E_M = \frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{R_T} = 0$$

donc

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}_N M_T}{R_T}} = \sqrt{2g_0 R_T} = 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

- 1.2.2.** Du fait de l'identité « masse grave » / « masse inertielle »,  $v_l$  ne dépend pas de la masse de l'objet ; il n'en serait pas de même si l'on tenait compte des frottements dans l'atmosphère terrestre.

- 1.2.3.** C'est bien la présence de la force gravitationnelle qui explique la trajectoire de la station spatiale autour de la Terre, la station est donc bien soumise à l'attraction terrestre. L'astronaute et la station spatiale situés au même point subissent la même accélération et tombent de concert sur la Terre, ce qui crée pour l'astronaute l'effet d'apesanteur.

- 1.2.4.** Trajectoires :

- 1.2.4.a.** Il faut supposer que la masse de la Terre est très supérieure à celle du satellite ce qui est une hypothèse vérifiée avec une excellente approximation.

- 1.2.4.b.** Dans le référentiel géocentrique, le point  $M$  est soumis à la seule force de gravitation exercée par la Terre sur l'objet :

$$m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r^3} \vec{r}$$

- 1.2.4.c.** La force étant centrale, le théorème du moment cinétique assure que  $\vec{\sigma}$ , le moment cinétique, est une constante du mouvement.

Comme  $\vec{L} = \vec{L}_0$  est une constante, que  $\vec{r} \cdot \vec{L} = 0$  et  $\vec{v} \cdot \vec{L} = 0$  : le mouvement a nécessairement lieu dans le plan contenant le centre de la Terre et perpendiculaire à  $\vec{L}$  (à condition que  $\vec{L} \neq \vec{0}$ ).

- 1.2.4.d.**  $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$  et  $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta$ .

- 1.2.4.e.**

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{v} = r \vec{e}_r \wedge (r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad (1)$$

comme  $\vec{L}$  est une constante, sa norme  $L = r^2 \dot{\theta}$  est aussi une constante.

1.2.4.f. La composante radiale de l'accélération vaut  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ , on combine à l'équation du mouvement (1) pour obtenir :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mathcal{G}_N M_T}{r^2}$$

$$\ddot{r} = r \left( \frac{L}{r^2} \right)^2 - \frac{\mathcal{G}_N M_T}{r^2} = \frac{L}{r^3} - \frac{\mathcal{G}_N M_T}{r^2}$$

1.2.4.g. L'équation précédente peut se réécrire :

$$m\ddot{r} = \frac{mL}{r^3} - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r^2} = f(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

et donc pour l'énergie potentielle :

$$V(r) = \frac{mL^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r}$$

1.2.4.h. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\frac{L^2}{r^4}\right) - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mL^2}{2r^2} - \frac{\mathcal{G}_N M_T m}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r)$$

La seule force présente étant conservative, l'énergie mécanique se conserve.

1.2.4.i. On peut écrire l'énergie potentielle  $V(r)$  :

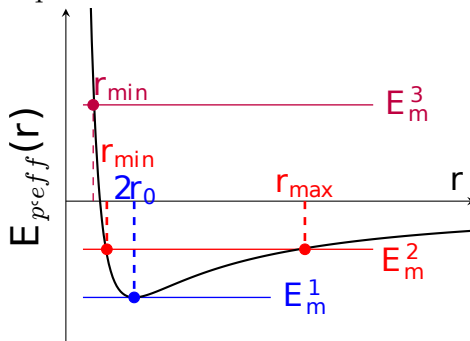
$$V(r) = -\frac{\mathcal{G}_N m M_T}{r} + \frac{1}{2}m\frac{L^2}{r^2} = \frac{\mathcal{G}_N m M_T}{r} \left( \frac{L^2}{2\mathcal{G}_N M_T r} - 1 \right) = \frac{\mathcal{G}_N m M_T}{r} \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right)$$

avec  $r_0 = \frac{L^2}{2\mathcal{G}_N M_T}$  qui vérifie  $V(r_0) = 0$ .

Étude de la fonction

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\mathcal{G}_N m M_T}{r^2} \left( 1 - \frac{2r_0}{r} \right); \text{ la fonction admet un minimum pour } r = 2r_0.$$

Représentation graphique



**États liés**

- Si  $E = E_m^1$ , il y a une seule position radiale accessible  $r = 2r_0$  pour laquelle  $V(2r_0) = E$  et  $\dot{r} = 0$ , la particule tourne sur un cercle de rayon  $2r_0$ .
- Si  $E = E_m^2$  avec  $E_m^1 < E_m^2 < 0$ , le mouvement est borné, la particule ne peut s'échapper à l'infini et oscille radialement entre deux positions extrêmes  $r_{\min}$  et  $r_{\max}$  points pour lesquels  $V(r) = E$  et  $\dot{r} = 0$ ; notons, qu'en ces deux points, la particule n'est pas à l'arrêt car la vitesse orthoradiale n'est pas nulle; la particule décrit une trajectoire elliptique.

**États de diffusion**

- Si  $E \geq 0$ , le mouvement n'est pas borné, la particule possède une distance minimale d'approche et finit par s'éloigner à l'infini.

**1.2.4.j.** Posons  $k = \mathcal{G}_N m M_T$ ; pour les positions limites  $\dot{r} = 0$ , ce qui impose :

$$V(r) = \frac{k}{r} \left( \frac{r_0}{r} - 1 \right) = E$$

$$Er^2 + kr - kr_0 = 0$$

Les solutions de cette équation sont :

$$r = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4Ekr_0}}{2E} = \frac{-k}{2E} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{4Er_0}{k}} \right)$$

On en déduit :

$$r_{\min} = \frac{-k}{2E} \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{4Er_0}{k}} \right) \quad \text{et} \quad r_{\max} = \frac{-k}{2E} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{4Er_0}{k}} \right)$$

*Remarque :* Notons que, pour une trajectoire elliptique (cf. étude graphique),  $-\frac{k}{4r_0} < E < 0$ , ce qui assure la positivité des deux racines et leur existence.

**1.2.4.k.**  $L = R_T v_0 \sin \alpha$  et  $E_M = -\frac{GM_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_0^2$ .

On considère la situation réaliste d'un lancer pour lequel  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Si  $v_0 \geq v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}_N M_T}{R_T}}$  :

on sait que la particule s'échappe à l'infini quel que soit  $\alpha$ ; le cas limite est un peu particulier mais il faudra déjà un temps infini à la particule pour atteindre l'infini donc elle ne risque pas de retomber sur Terre.

- Si  $v_0 < v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}_N M_T}{R_T}}$  :

la trajectoire est fermée et le mouvement périodique; on cherche les situations pour lesquelles il n'y a pas écrasement. Si  $\alpha \neq \pi/2$ , il y aura clairement collision avec la Terre. La seule solution à envisager est le

cas d'un lancer avec  $\alpha = \pi/2$ . La trajectoire doit au minimum être un cercle de rayon  $R_T$ , ce qui impose  $E_M = -\frac{GM_T m}{2R_T}$  soit :

$$v_0^2 \geq \frac{GM_T}{R_T}$$

## 2. Les lois de la Gravitation

### 2.1. La gravitation universelle

#### 2.1.a. Généralités

2.1.a. 1. Il y a quatre interactions fondamentales :

- **La gravitation**, l'interaction entre les masses ;
- **l'interaction électromagnétique** qui explique en particulier la cohésion de l'atome ;
- **l'interaction forte** qui explique la stabilité des noyaux et en particulier l'attraction entre les nucléons ;
- **l'interaction faible** qui explique par exemple la radioactivité  $\beta$ .

2.1.a. 2. Elles ont vécu au XVII<sup>e</sup> siècle.

2.1.a. 3. La masse « inerte » est la masse qui apparaît au premier membre de la deuxième loi de Newton et qui caractérise l'inertie des corps ; la masse pesante est l'équivalent de la charge électrique, c'est la masse qui apparaît dans la loi d'attraction universelle entre deux corps massifs.

2.1.a. 4. En l'absence de frottement (par exemple sur la Lune ou dans un long tube dans lequel on a fait le vide), deux corps différents mais de même masse chutent à l'identique. On peut repenser à l'astronaute évoqué dans la première partie de l'énoncé qui chute avec la navette.

#### 2.1.b. Champ, potentiel et énergie gravitationnels

2.1.b. 1.  $\vec{F} = m \vec{G}$ .

2.1.b. 2. Analogie avec les équations du champ électrostatique :

$$\operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

avec  $\rho_e$  la charge volumique.

La différence essentielle vient du signe des charges ; les masses sont toujours positives alors que les charges électriques peuvent être positives ou négatives.

2.1.b. 3. Équations de la magnétostatique :

$$\operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{rot}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$$

avec  $\vec{j}$  le vecteur densité de courant.

Les équations ne sont pas équivalentes aux équations de la gravitation, en particulier il n'existe pas de monopôle magnétique qui serait l'équivalent de la masse.

2.1.b. 4.  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{0}$  donc il existe un potentiel  $\Phi$  tel que  $\overrightarrow{G} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)$ .

On reporte dans la première formule de l'équation (4) de l'énoncé pour en déduire :

$$\text{div}(\overrightarrow{G}) = -\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi)) = -\Delta\Phi = -4\pi\mathcal{G}_N\rho$$

donc

$$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}_N\rho$$

2.1.b. 5. Si la distance  $r$  est très grande devant la taille  $l$  de la distribution, alors à l'ordre 0 en  $r/l$ , on peut poser  $PM \simeq OM = r$  et on en déduit :

$$\Phi(M) \simeq -\frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{r}$$

Vu de loin, tout se passe comme si la masse était concentrée sur l'origine et on retrouve l'expression du potentiel créé par une masse ponctuelle située à l'origine.

2.1.b. 6. Pour simplifier considérons le cas d'une distribution discrète de particules de masse  $m_i$  situées en  $P_i$ .

– la force subit par la particule s'écrit :  $\overrightarrow{f} = -m \sum_i \frac{\mathcal{G}_N m_i P_i \overrightarrow{M}}{P_i M^3}$

– elle prend aussi la forme :  $\overrightarrow{f} = -m \times \overrightarrow{\text{grad}}\Phi(M)$  avec  $\Phi(M) = -\sum_i \frac{\mathcal{G}_N m_i}{P_i M}$

Ceci prouve que cette forme dérive d'une énergie potentielle qui vaut :

$$e_p(M) = m\Phi(M)$$

Travail nécessaire à fournir :

La particule étant amenée de façon infiniment lente, il y a équilibre à chaque instant et  $\overrightarrow{f}_{op} = -\overrightarrow{f}_g$  avec  $\overrightarrow{f}_{op}$  la force exercée par l'opérateur et  $\overrightarrow{f}_g$  la force gravitationnelle ressentie par la particule.

$$\delta W_{op} = \overrightarrow{f}_{op} \cdot \overrightarrow{dl} = -\overrightarrow{f}_g \cdot \overrightarrow{dl} = m \times \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{dl}$$

Ce qui donne par intégration :

$$W_{op} = m \int_{\infty}^M \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \overrightarrow{dl} = m\Phi(M) = e_p(M)$$

La particule de masse  $m$  est attirée par les masses de la distribution, l'opérateur doit la retenir pour l'empêcher d'accélérer ce qui explique le caractère négatif de l'expression. Dit autrement, il faudrait apporter de l'énergie pour extraire la masse du puits de potentiel gravitationnelle et l'amener à l'infini choisi comme le zéro de l'énergie potentielle.

2.1.b. 7. À chaque apport d'une masse  $\delta m$  en un potentiel gravitationnel  $\Phi$ , le travail a fourni vaut :

$$\delta^2 W = \delta m \times \Phi$$

Il faut cependant faire attention que le potentiel se crée en même temps que l'on positionne les masses.

Le travail total à fournir pour effectuer une modification de la densité de charge de  $\delta\rho$  s'écrit :

$$\delta W = \int \Phi(r) \delta\rho(r) dv$$

Comme  $\Phi(r) = \mathcal{G}_N \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$ , on peut montrer en permutant deux intégrales que :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int \Phi(r) \delta\rho(r) dv = \int \rho(r) \delta\Phi(r) dv \\ &= \frac{1}{2} \int (\rho\delta\Phi + \Phi\delta\rho) dv = \frac{1}{2} \int \delta(\rho\Phi) dv = \delta \left( \frac{1}{2} \int \rho\Phi dv \right) \end{aligned}$$

Et finalement pour la construction de la totalité de la distribution de charges :

$$E_p = W = \frac{1}{2} \int \rho\Phi dv$$

Le facteur 1/2 corrige le fait que l'on compte deux fois l'interaction de chaque couple de masses.

*Remarque* : La démonstration ci-dessous s'inspire de "Électromagnétisme 2, Dunod Université, Bertin, Faroux, Renault".

## 2.1.c. Le théorème de Gauss pour la gravitation

### 2.1.c. 1. Théorème de Gauss électrostatique :

Le flux du champ électrostatique à travers une surface ( $\Sigma$ ) **fermée** et **orientée** vers l'extérieur est égal à la charge totale  $Q_{int}$  contenue à l'intérieur de cette surface divisée par  $\epsilon_0$  :

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_{int} = \iiint_{int \Sigma} \rho_e dv$$

### 2.1.c. 2. En comparant les expressions des forces électrostatique et gravitationnelle, on constate qu'il faut remplacer $Q_{int}/\epsilon_0$ par $-4\pi\mathcal{G}M_{int}$ , ce qui donne :

Le flux du champ de gravitation à travers une surface ( $\Sigma$ ) **fermée** et **orientée** vers l'extérieur est égal à la masse totale  $M_{int}$  contenue à l'intérieur de cette surface multipliée par  $-4\pi\mathcal{G}_N$  :

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}_N M_{int} \quad \text{avec} \quad M_{int} = \iiint_{int \Sigma} \rho dv$$

### 2.1.c. 3. On applique le théorème d'Ostogradski :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div}(\vec{G}) dv = -4\pi\mathcal{G}_N \iiint \rho dv = -4\pi\mathcal{G}_N M_{int}$$



2.1.c. 4. En un point d'un plan de symétrie de la distribution de masse, le champ gravitationnel est contenu dans ce plan. En un point d'un axe de symétrie de révolution de la distribution de masse, le champ gravitationnel est aligné avec cet axe.

### 2.1.d. Étude d'une distribution sphérique homogène

2.1.d. 1. Tout axe radial  $[O, \vec{e}_r]$  est un axe de symétrie de révolution de la distribution de masse, le champ gravitationnel s'écrit donc  $\vec{G} = -G(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$  (la force est bien sûr attractive d'où le signe « - »). La distribution étant invariante par toute rotation d'angle  $\theta$  et  $\varphi$ , la norme  $G$  ne peut dépendre que de  $r$ , donc

$$\vec{G} = -G(r) \vec{e}_r$$

2.1.d. 2. On applique le théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r$  :

$$- r > R : G(r) \times 4\pi r^2 = 4\pi \mathcal{G}_N \rho \frac{4\pi R^3}{3} \text{ donc } G(r) = \frac{\mathcal{G}_N \rho \times 4\pi R^3}{3r^2}.$$

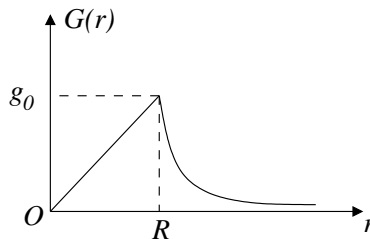
$$- r < R : G(r) \times 4\pi r^2 = 4\pi \mathcal{G}_N \rho \frac{4\pi r^3}{3} \text{ donc } G(r) = \frac{\mathcal{G}_N \rho \times 4\pi r}{3}.$$

À la surface de l'astre, le champ de gravitation vaut :

$$g_0 = G(R) = \frac{\mathcal{G}_N \rho \times 4\pi R}{3} = \frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{R^2}$$

avec  $M_{tot}$  la masse de l'astre.

Allure de la courbe :



2.1.d. 3. À l'extérieur, tout se passe comme si la totalité de la masse était au centre, le champ est identique au champ créé par une masse ponctuelle.

2.1.d. 4. Le potentiel gravitationnel est tel que :  $\vec{G}(r) = -G(r) \vec{e}_r = -\frac{d\Phi}{dr} \vec{e}_r$ , on en déduit :

$$- r \geq R : \Phi(r) = -\frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{r};$$

$$- 0 \leq r \leq R : \Phi(r) = \frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{2R^3} (r^2 - 3R^2).$$

La constante d'intégration a été déterminée en utilisant la continuité du potentiel en  $r = R$ .

2.1.d. 5. On calcule l'énergie potentielle de la distribution sachant qu'il n'y a pas de charge pour  $r > R$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\mathcal{G}_N M_{tot}}{2R^3} (r^2 - 3R^2) \frac{M_{tot}}{4\pi R^3/3} 4\pi r^2 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM_{tot}^2}{R}$$

### 2.1.e. Étude d'une distribution sphérique non homogène

2.1.e. 1. En utilisant l'élément de volume en coordonnées sphériques :

$$M(r) = \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

On en déduit :

- pour  $r < R$  :  $\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi\rho(r)r^2$  ;
- pour  $r > R$  :  $\frac{dM(r)}{dr} = 0$ , la masse n'augmente plus avec  $r$ .

2.1.e. 2. Pour une symétrie sphérique, l'énergie potentielle a pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{\infty} 4\pi r^2 \rho(r) \Phi(r) dr = \frac{1}{2} \int_{r=0}^{\infty} \frac{dM(r)}{dr} \Phi(r) dr$$

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} [M(r)\Phi(r)]_{r=0}^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} M(r) \frac{d\Phi(r)}{dr} dr \\ &= \frac{1}{2} M_{tot} \Phi_{\infty} - \frac{1}{2} M(0)\Phi(0) - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} M(r) \frac{d\Phi(r)}{dr} dr \end{aligned}$$

Comme  $M(0) = 0$  et pour une masse totale finie, on en déduit la formule proposée dans l'énoncé.

2.1.e. 3. Par définition  $\vec{G} = -G(r)\vec{e}_r = -\frac{d\Phi}{dr}\vec{e}_r$  donc  $G(r) = \frac{d\Phi}{dr}$  et pour l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} M(r)G(r) dr$$

2.1.e. 4. Par application du théorème de Gauss sur une sphère de rayon  $r$  contenant une masse  $M(r)$  :

$$G(r) \times 4\pi r^2 = 4\pi \mathcal{G}_N M(r) \quad \text{donc} \quad G(r) = \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r^2}$$

2.1.e. 5. Partons de l'expression de l'énergie potentielle, on intègre à nouveau par parties (avec  $\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$ ) :

$$E_p = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{G}_N}{r^2} M^2(r) dr = -\frac{1}{2} \left[ -\frac{\mathcal{G}_N}{r} M^2(r) \right]_0^{\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\mathcal{G}_N}{r} \times 2M(r)M'(r) dr$$

Pour le terme entre crochets :

- Pour  $r \rightarrow \infty$  :  $\frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} M(r) \sim \frac{\mathcal{G}_N M_{tot}^2}{r} \rightarrow 0$  ;
- Pour  $r \rightarrow 0$  :  $\frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} M(r) = |\Phi(0)|M(0) = 0$ .

Finalement, comme  $\rho(r) = 0$  pour  $r \geq R$  et  $M'(r) = 4\pi\rho r^2$  :

$$E_p = -\frac{1}{2} \times 2 \int_0^R \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} \times 4\pi\rho r^2 dr = - \int_0^R \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} \times 4\pi\rho r^2 dr$$

**2.1.e. 6.**  $4\pi r^2 \rho dr$  est la masse d'une couronne sphérique située entre deux sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$  ; on multiplie cette masse par le potentiel à la distance  $r$  pour en déduire l'énergie potentielle gravitationnelle.

## 2.2. La mesure de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}_N$

**2.2.1.** Le poids du corps donne accès à l'intensité de pesanteur terrestre  $g_0 = \mathcal{G}_N M_T / R_T^2$  et non directement à  $\mathcal{G}_N$  si on ne connaît pas  $M_T$  ou  $R_T$ .

**2.2.2.** Pendule de torsion

**2.2.2.a.** L'angle étant sans dimension,  $C$  est homogène à un moment de force :  $ML^2T^{-2}$ , c'est à dire des N.m = kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup> dans le système international d'unités.

**2.2.2.b.**  $I$ , dimension  $ML^2$  en N.m.s<sup>2</sup> donc en kg.m<sup>2</sup> ;  $\lambda$ , dimension  $ML^2T^{-1}$  en kg.m<sup>2</sup>.s<sup>-1</sup>.

Le premier terme est la projection du moment cinétique le long de l'axe de rotation,  $I$  représentant le moment d'inertie de la balance ;  $\lambda$  est associé aux frottements fluides ; le dernier terme est le couple de rappel.

**2.2.2.c.** Le discriminant du polynôme caractéristique doit être négatif :

$$\lambda^2 - 4IC < 0$$

Les racines du polynôme caractéristiques vérifient :

$$r_{\pm} = -\frac{\lambda}{2I} \pm i \frac{\sqrt{4IC - \lambda^2}}{2I} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega$$

– Temps caractéristique :  $\tau = 2I/\lambda$

– Pseudo-période  $T_0 = \frac{4\pi I}{\sqrt{4IC - \lambda^2}}$

On observe des oscillations amorties autour de la valeur d'équilibre  $\theta_{\infty} = 0$ .

**2.2.3.** Couple gravitationnel :

**2.2.3.a.** Le troisième terme de l'équation est modifié du fait de l'attraction gravitationnelle ; à l'équilibre le couple de rappel et le couple gravitationnelle se compensent :

$$M_g(\theta_{eq}) = C\theta_{eq}$$

**2.2.3.b.** – Calcul de  $M_{g1}$  :

$$M_{g1} = 2 \left| \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F}_{B_1 \rightarrow A_1} \right| = 2d \frac{\mathcal{G}_N m M}{R^2}$$

– Calcul de  $M_{g2}$  :

Ce second terme tend à faire tourner les masses dans l'autre sens, il y aura donc un « - » dans le résultat final. De plus la distance entre les masses vaut  $\sqrt{R^2 + 4d^2}$  et finalement :

$$|M_{g2}| = 2 \left| \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F}_{B_2 \rightarrow A_1} \right| = 2d \frac{\mathcal{G}_N m M}{R^2 + 4d^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4d^2}}$$

En tenant compte des deux contributions, on obtient :

$$M_g = 2d \frac{\mathcal{G}_N m M}{R^2} \left( 1 - \frac{R^3}{(R^2 + 4d^2)^{3/2}} \right)$$

2.2.3.c. A.N. :  $\theta_{eq} = \frac{M_g}{C} = 1,15 \times 10^{-2} \text{ rad} \simeq 0,7^\circ$

Une observation directe d'une si faible déviation semble difficile à réaliser.

2.2.4. Méthode actuelle :

2.2.4.a. D'après la loi de la réflexion :  $\alpha = 2\theta_e$ .

2.2.4.b. Comme  $\alpha \ll 1 \text{ rad}$ ,  $e \simeq L\alpha = 2L\theta_e$ , ce qui impose :

$$L \simeq \frac{e}{2\theta_e} = \frac{10^{-2}}{2 \times 1,5 \times 10^{-2}} \simeq 30 \text{ cm}$$

La taille du dispositif reste modeste.

2.2.4.c. Il faut disposer de l'intensité de pesanteur  $g_0$  qui est reliée aux autres grandeurs par :

$$g_0 = \frac{\mathcal{G}_N M_T}{R_T^2}$$

2.2.4.d.  $R_T$  pouvait être mesuré par triangulation.

2.2.4.e. La grandeur  $g_0$  peut être déterminée *via* la mesure de la période propre  $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g_0}$  d'un pendule simple.

### 3. La gravitation des les étoiles

#### 3.1. Équilibre mécanique dans une étoile

##### 3.1.a. Temps d'effondrement sous l'effet de la gravitation

3.1.a. 1. Les particules vont être attirées vers le centre ; en présence de la seule force gravitationnelle, l'équilibre correspond à toutes les particules au centre.

3.1.a. 2. Le point  $M$  est soumis à une force centrale, le moment cinétique se conserve, comme il est initialement nul, il le reste pour la suite du mouvement et la trajectoire du point  $M$  est rectiligne.

3.1.a. 3. Le point  $M$  est soumis à la force de gravitation exercée par le reste de l'étoile :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{r}(t)}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G}_N M_s m}{r^2} \overrightarrow{e}_r \quad \text{donc} \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = - \frac{\mathcal{G}_N M_s}{r^2}$$

3.1.a. 4. Pour intégrer, on multiplie l'équation scalaire par  $\dot{r}$  :

$$\dot{r}\ddot{r} = -\mathcal{G}_N M_s \frac{\dot{r}}{r^2} \quad \text{donc} \quad \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{\mathcal{G}_N M_s}{r} + \text{cste}$$

La constante est déterminée sachant que  $\dot{r}(0) = 0$  et  $r(0) = R_s$ , et finalement :

$$v^2 = 2\mathcal{G}_N M_s \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_s} \right)$$

La vitesse tend vers l'infini quand la masse de l'étoile se concentre au centre, le modèle n'est donc pas réaliste.

3.1.a. 5. Commençons par prendre la racine de l'expression précédente sachant que  $r$  va diminuer :

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{2\mathcal{G}_N M_s \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_s} \right)}$$

On pose  $r = xR_s$  pour obtenir :

$$R_s \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mathcal{G}_N M_s}{R_s} \left( \frac{1-x}{x} \right)}$$

On en déduit :

$$dt = -\sqrt{\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}_N M_s}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

On intègre alors de  $t = 0$  ( $x = 1$ ) et  $t = t_{\text{eff}}$  ( $x = 0$ ) :

$$t_{\text{eff}} = \int_0^{t_{\text{eff}}} dt = \sqrt{\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}_N M_s}} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R_s^3}{2\mathcal{G}_N M_s}}$$

3.1.a. 6. Comme  $\rho = \frac{M_s}{4\pi R_s^3/3}$  :

$$t_{\text{eff}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\mathcal{G}_N \rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\mathcal{G}_N \rho}}$$

On constate que pour une étoile donnée, la durée d'effondrement ne dépend que de la masse volumique de l'étoile. Plus la masse volumique est importante, plus la durée d'effondrement est courte.

3.1.a. 7.  $t_{\text{eff}} \simeq 1,7 \times 10^3$  s ; cette durée est bien sûr très faible vis à vis de la durée de vie du Soleil de l'ordre de 10 milliards d'années.

### 3.1.b. Effet de la pression

3.1.b. 1. Équilibre hydrostatique :

**3.1.b. 1.a.** En notant  $P(r)$  la pression en  $r$  et  $P(r + dr)$  la pression en  $r + dr$ , les forces de pression ont pour expression :

$$(P(r) - P(r + dr)) d^2S \vec{e}_r$$

**3.1.b. 1.b.**  $\delta m = \rho dr d^2S$  et pour la force gravitationnelle :

$$\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}_N \delta m M(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

**3.1.b. 1.c.** À l'équilibre, les forces se compensent :

$$-\frac{\mathcal{G}_N \rho dr d^2S M(r)}{r^2} - \frac{dP}{dr} dr d^2S = 0$$

donc

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mathcal{G}_N \rho M(r)}{r^2}$$

**3.1.b. 1.d.** Pour un problème à symétrie sphérique :

$$\vec{\text{grad}}(P) = \frac{dP}{dr} \vec{e}_r$$

et

$$-\rho \vec{\text{grad}}(\Phi) = \rho \vec{G} = -\frac{\rho \mathcal{G}_N M(r)}{r^2} \vec{e}_r$$

donc

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mathcal{G}_N \rho M(r)}{r^2}$$

**3.1.b. 2.** Équation d'état :

**3.1.b. 2.a.**  $M(r) = \rho \times 4\pi \frac{r^3}{3}$ , et donc :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\mathcal{G}_N \rho^2 4\pi r}{3}$$

donc

$$P(r) = P_0 - \frac{2\pi \mathcal{G}_N \rho^2 r^2}{3}$$

**3.1.b. 2.b.** Le rayon de l'étoile est tel que  $P(R_s) = 0$  donc :

$$R_s = \sqrt{\frac{3P_0}{2\pi \mathcal{G}_N \rho^2}}$$

**3.1.b. 2.c.** On détermine alors la masse de l'étoile :

$$M_s = \rho \times \frac{4\pi}{3} R_s^3 = \frac{4\pi \rho}{3} \left( \frac{3P_0}{2\pi \mathcal{G}_N \rho^2} \right)^{3/2} = \left( \frac{6P_0^3}{\pi \mathcal{G}_N^3 \rho^4} \right)^{1/2}$$

La masse est inversement proportionnelle au carré de la masse volumique ; notons que le rayon varie comme l'inverse de la masse volumique ; à masse volumique élevée, l'effet de la gravitation est très important réduisant d'autant la taille de l'étoile.

3.1.b. 3. Un modèle plus élaboré :

3.1.b. 3.a.  $\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2$  ; on utilise alors l'équation de l'hydrostatique :  $\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = -\mathcal{G}_N M(r)$  Expression que l'on dérive par rapport à  $r$  :

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -\mathcal{G}_N \frac{dM(r)}{dr} = -\mathcal{G}_N 4\pi r^2 \rho(r)$$

donc

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -\mathcal{G}_N 4\pi \rho(r)$$

3.1.b. 3.b. Comme  $P(r) = \lambda \rho(r)^2$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} 2\lambda \rho(r) \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi \mathcal{G}_N \rho(r)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( 2r^2 \lambda \frac{d\rho}{dr} \right) = -4\pi \mathcal{G}_N \rho(r)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{2\pi \mathcal{G}_N}{\lambda} \rho(r) r$$

Avec  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\rho}{dr} \right) = 2 \frac{d\rho}{dr} + r \frac{d^2 \rho}{dr^2} = \frac{d^2 \rho r}{dr^2}$  donc :

$$\frac{d^2 \rho r}{dr^2} = -\frac{2\pi \mathcal{G}_N}{\lambda} \rho(r) r$$

3.1.b. 3.c. Posons  $a^2 = \frac{\lambda}{2\pi \mathcal{G}_N}$ , l'équation s'écrit alors :  $\frac{d^2 \rho r}{dr^2} + \frac{\rho(r) r}{a^2} = 0$ .

Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$r\rho(r) = A \sin(r/a) + B \cos(r/a)$$

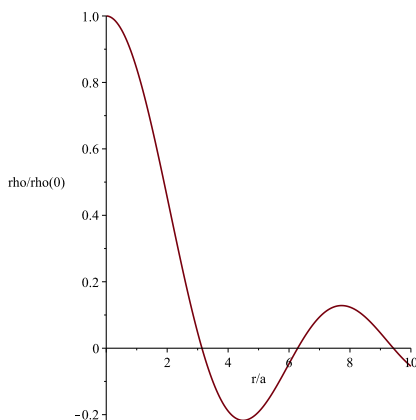
donc

$$\rho(r) = \frac{A \sin(r/a)}{r} + \frac{B \cos(r/a)}{r}$$

La densité devant être finie au centre,  $B$  est nécessairement nulle ; de plus en  $r \rightarrow 0$  :  $\rho_0 = A/a$  donc  $A = a\rho_0$  et finalement :

$$\rho(r) = \rho_0 \frac{a \sin(r/a)}{r}$$

3.1.b. 3.d. Allure de la courbe :



Le rayon  $R_s$  est associé à la première annulation de la masse volumique :  $\rho(R_s) = 0$  donc  $R_s = a\pi$ .

**3.1.b. 3.e.** Avec  $R_s = a\pi$ ,  $a^2 = \frac{\lambda}{2\pi\mathcal{G}_N}$  et  $P_0 = \lambda\rho_0^2$ , on en déduit :

$$R_s = \left( \frac{\pi P_0}{2\mathcal{G}_N \rho_0^2} \right)^{1/2}$$

À un coefficient numérique proche de l'unité, les deux expressions sont tout à fait cohérentes.

**3.1.b. 3.f.** Dans ce modèle à symétrie sphérique, la masse se calcule selon :

$$M_s = \int_0^{R_s} 4\pi r^2 \frac{\rho_0 a \sin r/a}{r} dr = \rho_0 \times 4\pi a^3 \int_0^\pi u \sin u du \quad \text{avec } u = r/a$$

$$M_s = 4\pi^2 \rho_0 a^3$$

### 3.1.c. La masse de Chandrasekhar

**3.1.c. 1.** Un exemple de loi polytropique est par exemple la loi de Laplace pour la transformation adiabatique réversible d'un gaz parfait.

**3.1.c. 2.** On reporte  $r = xr_\gamma$  et  $P = \lambda\rho^\gamma$  dans l'équation (22) de l'énoncé :

$$\frac{1}{x^2 r_\gamma^2} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^2 r_\gamma^2}{\rho(x)} \lambda \gamma \rho^{\gamma-1} \frac{d\rho}{dx} \frac{dx}{dr} \right) \frac{dx}{dr} = -4\pi \mathcal{G}_N \rho$$

$$\frac{1}{x^2 r_\gamma^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{\lambda \gamma}{\gamma - 1} \frac{d}{dx} \left( \frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_0^{\gamma-1}} \right) \right) = -4\pi \mathcal{G}_N \frac{\rho}{\rho_0^{\gamma-1}}$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{d\psi}{dx} \right) = -\frac{\rho}{\rho_0} \left( \frac{4\pi \mathcal{G}_N r_\gamma^2}{\rho_0^{\gamma-2}} \frac{\gamma - 1}{\gamma \lambda} \right)$$

Ce qui impose

$$n = \frac{1}{\gamma - 1} \quad \text{et} \quad r_\gamma^2 = \frac{\lambda \gamma \rho_0^{\gamma-2}}{4\pi (\gamma - 1) \mathcal{G}_N}$$



notons qu'avec  $\gamma = 2$ , on retrouve les expressions de la partie précédente.

**3.1.c. 3.**  $\psi(0) = 1$  signifie simplement que  $\rho(0) = \rho_0$ .

L'équation (19) de l'énoncé peut se réécrire, au voisinage de l'origine :

$$\frac{dP}{dr} \simeq -\frac{\mathcal{G}_N \times (4\pi)/3 \times r^3 \rho_0^2}{r^2} \sim \alpha r$$

Ceci impose  $\frac{dP}{dr}(0) = 0$ , donc  $\frac{d\rho}{dr}(0) = 0$  et  $\frac{d\psi}{dr}(0) = 0$ .

**3.1.c. 4.**  $R_s = x_s r_\gamma$ .

**3.1.c. 5.** Masse de Chandrasekhar :

**3.1.c. 5.a.** Le calcul faisant apparaître les propriétés quantiques d'un gaz d'électrons relativiste, il est logique de voir apparaître les constantes  $h$  et  $c$ .

Dans les calculs précédents, on a constaté que la masse de l'étoile était inversement proportionnelle au carré de la masse volumique ; comme l'étoile est essentiellement constituée d'un gaz d'hydrogène ionisé (des protons et des électrons), il semble logique de voir apparaître le carré de la masse du proton au dénominateur (la masse des électrons étant négligeable devant celle des protons).

**3.1.c. 5.b.**  $M_{Ch} = 2,8 \times 10^{30} \text{ kg} = 1,4 M_\odot$ .

**3.1.c. 5.c.** Si, en fin de sa phase en séquence principale, l'étoile a une masse supérieure à la masse de Chandrasekhar, la pression quantique du gaz d'électrons dégénéré n'est pas en mesure de contrecarrer les effets de la gravitation. L'étoile s'effondre sur elle-même, les électrons et les protons fusionnent pour donner naissance à une étoile à neutrons et éventuellement à un trou noir si la masse initiale dépasse la dizaine de masses solaires.

### 3.1.d. Stabilité de l'équilibre dans une étoile

**3.1.d. 1.** Pour un gaz parfait :  $P = \frac{\rho}{m} k_B T_0$  et en particulier pour les termes d'ordre

$$1 : P_1 = \frac{\rho_1}{m} k_B T_0.$$

**3.1.d. 2.** Équation de Poisson :  $\Delta\Phi - 4\pi\mathcal{G}_N\rho = 0$  donc, à l'ordre 1 :

$$\Delta\Phi_1 - 4\pi\mathcal{G}_N\rho_1 = 0$$

**3.1.d. 3.** Équation de l'hydrodynamique :

**3.1.d. 3.a.** La première équation est l'équation de conservation de la matière, la seconde est l'équation de Navier-Stokes pour un fluide parfait dans lequel on néglige la viscosité.

**3.1.d. 3.b.** À l'ordre 0, comme  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , le premier membre est nul et on retrouve l'équation de la statique des fluides.

**3.1.d. 3.c.** En se limitant à des termes d'ordre 1 :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}_1) = 0$$

et

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_1) - \rho_0 \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_1) - \rho_1 \overrightarrow{\text{grad}}(\Phi_0)$$

**3.1.d. 4.** Modèle unidimensionnel :

**3.1.d. 4.a.** Dans le cadre d'un modèle unidimensionnel avec  $\Phi_0$  constant :

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$$

et

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$$

**3.1.d. 4.b.** On dérive la première équation par rapport au temps et on reporte la seconde pour en déduire :

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 0$$

**3.1.d. 4.c.** On utilise l'équation des gaz parfaits  $P_1 = \frac{k_B T_0}{m} \rho_1$  et l'équation de Poisson :

$$\text{son : } \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = 4\pi \mathcal{G}_N \rho_1 :$$

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{k_B T_0}{m} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} - 4\pi \rho_0 \mathcal{G}_N \rho_1 = 0 \quad \text{avec} \quad c_s^2 = \frac{k_B T_0}{m}$$

**3.1.d. 4.d.**  $c_s$  est homogène à une vitesse, c'est la vitesse des ondes dans le fluide.

**3.1.d. 5.** Propagation d'une onde monochromatique :

**3.1.d. 5.a.**  $\omega$  est une pulsation en  $\text{rad.s}^{-1}$  et  $k$  est le vecteur d'onde, c'est l'inverse d'une longueur en  $\text{m}^{-1}$ .

En reportant dans l'équation (32), on obtient l'équation de dispersion :

$$-\omega^2 + c_s^2 k^2 - 4\pi \mathcal{G}_N \rho_0 = 0$$

**3.1.d. 5.b.** Pour que  $\omega^2 > 0$ , il faut :  $c_s^2 k^2 > 4\pi \mathcal{G}_N \rho_0$ .

Si  $\omega$  est imaginaire pur, il y aura des termes en  $\exp(+\omega t)$ , cela signifie une solution divergente et donc une instabilité.

La condition de stabilité s'écrit donc :

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \geq \frac{4\pi \mathcal{G}_N \rho_0}{c_s^2}$$

donc :

$$\lambda^2 \leq \lambda_J^2 = \frac{\pi c_s^2}{\mathcal{G}_N \rho_0}$$

**3.1.d. 5.c.** Pour que l'étoile soit stable, la pression interne doit compenser l'effet de la gravité. Si l'étoile commence à s'effondrer, il faut que la perturbation générée se propage suffisamment vite pour permettre à la pression de s'ajuster pour compenser l'augmentation de la gravité. L'étoile est donc stable si le temps de propagation de l'onde sonore est inférieur à la durée de l'effondrement.

**3.1.d. 5.d.** Le temps de propagation de l'onde sonore  $\tau = R_s/c_s$  doit être inférieur à la durée d'effondrement, ce qui impose,  $\tau^2 < t_{\text{eff}}^2$  donc :

$$\frac{R_s^2}{c_s^2} < \frac{3\pi}{32\mathcal{G}_N\rho_0}$$

## 3.2. Aspects énergétiques : réactions nucléaires

### 3.2.a. Le théorème du Viriel

**3.2.a. 1.** Équation (14) :  $E_p = - \int_0^{R_s} \frac{\mathcal{G}_N M(r)}{r} 4\pi r^2 \rho(r) dr$ .

$$\text{Équation (19) : } \frac{dP}{dr} = - \frac{\mathcal{G}_N M(r)\rho(r)}{r^2}$$

On combine les deux équations :

$$E_p = \int_0^{R_s} \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr = \left[ P(r) \times 4\pi r^3 \right]_0^{R_s} - 3 \int_0^{R_s} P 4\pi r^2 dr$$

Comme  $P(R_s) = 0$ , on en déduit :

$$E_p = -3 \int_0^{R_s} P 4\pi r^2 dr$$

### 3.2.a. 2. Théorème du Viriel :

**3.2.a. 2.a.** Dans un gaz parfait monoatomique, l'énergie interne est associée à l'énergie cinétique microscopique de translation.

Le facteur 3/2 provient des trois degrés de liberté associés au mouvement de translation selon trois axes orthogonaux.

**3.2.a. 2.b.**  $u = \frac{3}{2}P$ , ce qui donne pour l'énergie interne totale de l'étoile :

$$U = \int_0^{R_s} \frac{3}{2}P \times 4\pi r^2 dr = \frac{3}{2} \int_0^{R_s} P \times 4\pi r^2 dr = -\frac{E_p}{2}$$

donc

$$2U + E_p = 0$$

**3.2.a. 2.c.** En l'absence d'énergie cinétique macroscopique, l'énergie totale de l'étoile est la somme de son énergie interne et de son énergie potentielle :

$$E_{\text{tot}} = U + E_p = \frac{E_p}{2}$$

### 3.2.a. 3. Énergie disponible :

**3.2.a. 3.a.** A.N. :

$$E_{\text{tot}} = -\frac{\mathcal{G}_N M^2}{2R} = -\frac{6,67 \times 10^{-11} \times (1,99 \times 10^{30})^2}{2 \times 6,95 \times 10^8} = -1,9 \times 10^{41} \text{ J}$$

**3.2.a. 3.b.** A.N. :  $\tau = |E_{\text{tot}}/L| = 1,9 \times 10^{41} / (3,83 \times 10^{26}) = 4,96 \times 10^{14} \text{ s} \simeq 16 \text{ millions d'années}$

**3.2.a. 3.c.** L'énergie dont on parle ici est issue de l'effondrement gravitationnel, cependant il y a une source d'énergie disponible au sein de l'étoile, l'énergie des réactions nucléaires qui va permettre d'entretenir la luminosité de l'étoile.

**3.2.a. 4.** Température de l'étoile :

**3.2.a. 4.a.** Pour un gaz parfait monoatomique :  $U = \frac{3}{2}Nk_B T_\odot$ .

**3.2.a. 4.b.** Comme  $U = -E_p/2$ , on en déduit :

$$\frac{\mathcal{G}_N M^2}{2R} = \frac{3}{2}Nk_B T_\odot$$

donc

$$T_\odot = \frac{\mathcal{G}_N M^2}{3NRk_B}$$

**3.2.a. 4.c.** La masse de l'étoile vérifie :

$$N_H m_H = \frac{7}{3}N_{\text{He}} m_{\text{He}}$$

et

$$M = N_H m_H + N_{\text{He}} m_{\text{He}} = \frac{10}{7}N_H m_H$$

On en déduit :

$$N_H = \frac{7M}{10m_H} = 8,34 \times 10^{56}$$

et

$$N_{\text{He}} = \frac{3N_H m_H}{7m_{\text{He}}} = 9 \times 10^{55}$$

D'où :  $N = N_H + N_{\text{He}} = 9,2 \times 10^{56}$  atomes et  $T_\odot \simeq 10^6$  K

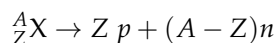
### 3.2.b. Les réactions nucléaires dans les étoiles

**3.2.b. 1.** Des noyaux légers fusionnent pour donner des noyaux plus lourds. Il s'agit de réactions de fusion.

**3.2.b. 2.** Énergie de liaison

**3.2.b. 2.a.**  $Z$  est le nombre de protons et  $A$  le nombre de nucléons du noyau. Quand on passe d'un noyau à un autre, le nombre de nucléons n'est pas le même ; pour estimer un gain de stabilité, il faut regarder le gain par nucléon et donc l'énergie de liaison par nucléon.

**3.2.b. 2.b.** L'énergie de liaison représente l'énergie à fournir pour réaliser la réaction :



Et donc pour l'énergie de liaison :

$$E_l(A, X) = (Zm_p + (A - Z)m_n - M_X) c^2$$

L'interaction forte est responsable de la cohésion du noyau.

- 3.2.b. 2.c.** Les noyaux les plus stables sont ceux qui disposent de la plus grande énergie de liaison par nucléon, c'est à dire sur le graphique  $^{56}\text{Fe}$ .  
Les noyaux légers situés avant le fer (H, He, Li, C, ...) sont susceptibles de subir la fusion.  
Les noyaux lourds comme l'uranium sont susceptibles de subir le phénomène de fission.
- 3.2.b. 2.d.** Le premier terme est proportionnel au nombre de nucléons et donc au volume du noyau, il est lié à l'interaction forte entre nucléons voisins.  
Le deuxième terme est un terme de surface ( $A$  proportionnel au volume donc  $A^{2/3}$  proportionnel à la surface), ce terme prend en compte le fait que les nucléons externes n'ont pas autant de voisins, ce qui diminue l'énergie de liaison et explique le signe « - ».  
Le troisième terme représente la répulsion à grand distance entre les protons du noyau (d'où le terme en  $Z(Z - 1)$ , chaque proton subissant l'interaction des  $Z - 1$  autres protons), énergie en  $1/A^{1/3}$  c'est à dire en  $1/R$ , comme l'énergie gravitationnelle étudiée dans la partie précédente.
- 3.2.b. 3.** Fusion au sein du Soleil :
- 3.2.b. 3.a.**  $\nu_e$  représente un neutrino,  $e^+$  le positron, anti-particule de l'électron.
- 3.2.b. 3.b.** Il s'agit d'une désintégration  $\beta^+$  associée à l'interaction faible.
- 3.2.b. 3.c.** Désintégration  $\beta^-$  :
- 3.2.b. 3.c.i.**  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$   
Les produits formés sont : le proton, l'électron et un anti-neutrino.
- 3.2.b. 3.c.ii.**  ${}^6_6\text{C} \rightarrow {}^7_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ .
- 3.2.b. 3.c.iii.**  $N(t) = N_0 \exp(-\ln 2 \times t/T_{1/2})$
- 3.2.b. 3.c.iv.** Principe de la datation au carbone 14 :  
Durant son existence, un forme vivante échange avec l'atmosphère et maintient une proportion fixe de rapport carbone 14/carbone 12.  
À la fin de son existence, les échanges s'arrêtent et, les atomes de carbone 14 se désintégrant, la rapport carbone 14/carbone 12 diminue ; il est alors possible de lier cette valeur au temps écoulé depuis la mort de l'individu ou du végétal.
- 3.2.b. 3.c.v.** Les atomes d'azote des molécules de diazote de l'atmosphère subissent des collisions avec des neutrons provenant du rayonnement cosmique conduisant à la formation de carbone 14.
- 3.2.b. 3.d.** La désintégration du neutron est une réaction spontanée du fait que le neutron a une masse supérieure à celle du proton.
- 3.2.b. 3.e.** Les protons doivent s'approcher à une distance de l'ordre du fermi car l'interaction forte n'est sensible qu'à très courte distance. En égalant l'énergie cinétique microscopique et l'énergie de répulsion coulombienne :

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\delta} = \frac{3}{2}k_B T_{nucl}$$

donc

$$T_{nucl} = \frac{e^2}{6\pi k_B \epsilon_0 \delta} = \frac{(1,6 \times 10^{-19})^2}{6\pi \times 1,38 \times 10^{-23} \times 8,85 \times 10^{-12} \times 10^{-15}} \simeq 1 \times 10^{10} \text{ K}$$

**3.2.b. 3.f.** La grandeur déterminée précédemment était la température moyenne de l'étoile et non la température plus élevée au centre de l'étoile.

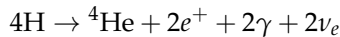
**3.2.b. 4.** La particule étant formée dans un état excité, elle évacue le trop plein d'énergie en émettant un photon  $\gamma$ , d'une énergie de l'ordre du MeV.

Pour la fréquence :  $hf_\gamma = e_\gamma$  donc :

$$f_\gamma = \frac{e_\gamma}{h} = \frac{10^6 \times 1,6 \times 10^{-19}}{6,62 \times 10^{-34}} \simeq 2 \times 10^{20} \text{ Hz}$$

Le photon est la particule médiatrice de l'interaction électromagnétique.

**3.2.b. 5.** On effectue 2(i)+2(ii)+(iii) :



$$E_{PP} = (4m_{\text{H}} - m_{{}^4\text{He}} - 2m_{e^+})c^2 = 4,3 \times 10^{-12} \text{ J}$$

Résultat que l'on compare à la valeur donnée par l'énoncé :  $E_{PP} = 4 \times 0,007 \times 1,67 \times 10^{-27} \times (3 \times 10^8)^2 = 4,2 \times 10^{-12} \text{ J}$ , les deux résultats sont bien similaires.

**3.2.b. 6.** Déterminons l'énergie disponible du fait des réactions nucléaires :

- Nombre de protons concernés :  $N_p = 0,1 \times M/m_p$
- Énergie libérée :  $E = N_p \times 0,007m_p c^2$
- Durée de la réaction :

$$\tau = \frac{0,1 \times M \times 0,007c^2}{L} = \frac{0,1 \times 1,99 \times 10^{30} \times 0,007 \times (3 \times 10^8)^2}{3,83 \times 10^{26}} = 3,3 \times 10^{17} \text{ s}$$

C'est à dire 10 milliards d'années, durée tout à fait en accord avec la durée de vie du Soleil dans sa phase actuelle.

**3.2.b. 7.** Autres réactions au sein de l'étoile :

**3.2.b. 7.a.** On utilise la conservation du nombre de nucléons et la conservation de la charge. La particule  $x$  possède une charge  $+e$  et n'est pas un nucléon, il s'agit donc d'un positron :  $x = {}^0_1e^+$ .

**3.2.b. 7.b.** Bilan (en faisant la somme) :  $4\text{H} \rightarrow {}^4\text{He} + 2e^+ + 3\gamma$ .

Rôle du carbone : le carbone va faciliter la réaction, comme un catalyseur en chimie.

**3.2.b. 8.** La difficulté de la fusion est liée au confinement des protons, dans l'étoile ceci est assuré par la gravité. La fusion est un processus plus efficace que la fission, les combustibles sont disponibles en plus grande quantité et la fusion produit beaucoup moins de déchets radioactifs que la fission.

## 4. L'effet de lentille gravitationnelle

### 4.1. La déflexion d'un rayon lumineux par le Soleil

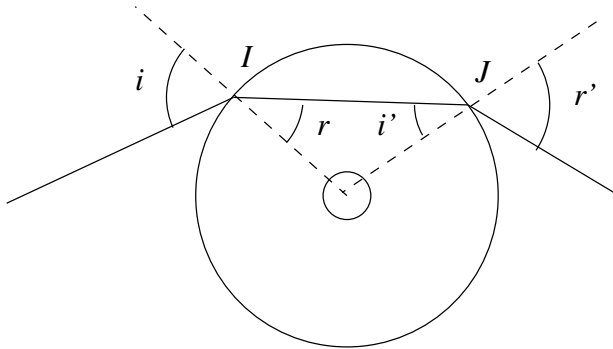
**4.1.1.** - Première loi :

Le rayon réfracté est situé dans le plan d'incidence, plan défini par la normale au dioptre au point d'incidence et le rayon incident.

– Seconde loi :

Soit  $n_1$  l'indice du premier milieu,  $n_2$  l'indice du second milieu,  $i_1$  l'angle d'incidence et  $i_2$  l'angle réfracté (défini par rapport à la normale) :  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$

4.1.2. Calcul de la déviation :



$$\alpha = (i - r) + (r' - i')$$

Comme le triangle  $SIJ$  est isocèle, alors  $r = i'$ , ce qui impose, du fait de la seconde loi de Descartes,  $r' = i$ , et donc finalement :

$$\alpha = 2(i - r)$$

4.1.3. A.N.  $\frac{2\mathcal{G}_N M}{Rc^2} = \frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \times 1,99 \times 10^{30}}{6,95 \times 10^8 \times (3 \times 10^8)^2} = 4,24 \times 10^{-6} \ll 1$

L'indice étant très proche de 1, la réfraction est très limitée et  $r \simeq i$ .

4.1.4.  $\varepsilon$  est de l'ordre de  $\frac{\mathcal{G}_N M}{ac^2}$ , le calcul à l'ordre 1 donne :

$$\sin i = n \sin r \simeq \left(1 + \frac{2\mathcal{G}_N M}{ac^2}\right) (\sin i + \varepsilon \cos i) \simeq \sin i + \varepsilon \cos i + \frac{2\mathcal{G}_N M}{ac^2} \sin i$$

On en déduit :

$$\varepsilon = \frac{-2\mathcal{G}_N M \sin i}{ac^2 \cos i}$$

et pour l'angle  $\alpha$  :

$$\alpha = 2(i - r) = -2\varepsilon = \frac{4\mathcal{G}_N M \sin i}{ac^2 \cos i}$$

4.1.5. Si  $p$  est défini par rapport au rayon qui traverse la sphère imaginaire  $p = a \sin r = \frac{a \sin i}{n}$  ; si  $p$  est défini par rapport au rayon incident alors  $p = a \sin i$ .

Remarque : La définition de l'énoncé est quelque peu imprécise. Comme  $n$  est très proche de 1, confondre les deux expressions n'a guère d'importance.

4.1.6. La comparaison de notre expression et de l'expression de l'énoncé conduit à  $p = a / \tan i$ , ce qui n'est compatible avec le modèle géométrique ; en particulier pour un rayon tel que  $i = \pi/2$ , il semblerait logique de retrouver  $p = a$ .

Sur l'idée des modèles stratifiés utilisés pour étudier les fibres optiques ou les mirages, on pourrait imaginer un modèle à couches concentriques tel que  $n = n(r)$  avec  $r$  la distance au centre du Soleil.

4.1.7. A.N. :  $\alpha = 2(i - r) = -2\varepsilon = \frac{4G_N M}{1,5 \times R c^2} = 5,65 \times 10^{-6} \text{ rad}$

4.1.8. Il s'agit d'éliminer les rayons issus du Soleil dans lesquels seraient noyés les rayons à observer.

On observe un anneau.

## 4.2. La mesure de l'angle de déflexion par une lunette astronomique

### 4.2.a. Les lentilles minces

4.2.a. 1. Propriétés des lentilles minces :

4.2.a. 1.a. Une lentille sphérique est limitée par deux dioptries sphériques contenant un milieu transparent d'indice optique  $n$ .

Une lentille est appelée «lentille mince» si l'épaisseur de la lentille est en particulier faible devant les rayons de courbure des dioptries sphériques.

4.2.a. 1.b. L'axe optique correspond à l'axe de symétrie de révolution des dioptries sphériques. Un rayon se propageant le long de l'axe optique ne sera pas dévié.

4.2.a. 1.c. Une lentille est stigmatique dans les conditions de Gauss, c'est à dire pour des rayons proches de l'axe et peu inclinés par rapport à l'axe optique.

4.2.a. 1.d. Les rayons issus du foyer objet  $F$  ressortent parallèlement à l'axe optique ; les rayons arrivant parallèle à l'axe optique émergent en convergeant eux ou leurs prolongements au foyer image  $F'$ .

4.2.a. 2. Relation de conjugaison :

4.2.a. 2.a. Pour la relation avec origine en  $O$  :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{OF'} = \frac{1}{f'}$$

4.2.a. 2.b. Exprimons  $p'$  en fonction de  $p$  :

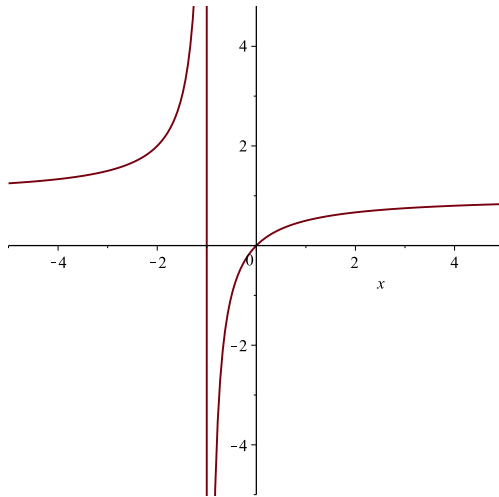
$$p' = \frac{p \times f'}{p + f'}$$

Posons  $X = p/f'$  et  $X' = p'/f'$ , l'équation s'écrit alors :

$$X' = \frac{X}{1 + X}$$

L'étude de la fonction permet d'obtenir le tracé de la courbe  $X' = X'(X)$  :



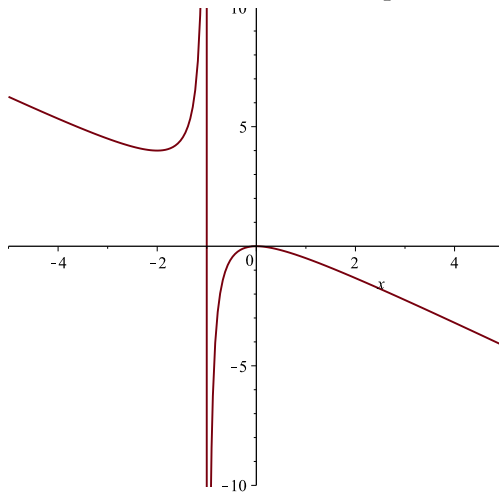


On veut un objet réel ( $X < 0$ ) et une image réelle ( $X' > 0$ ) ce qui impose de se situer dans le domaine  $X < -1$ .

Il reste à évaluer la distance entre l'objet et l'image qui s'écrit compte tenu des signes :

$$d = X' - X = -\frac{X^2}{1+X}$$

La courbe représentant  $d$  en fonction de  $X$  est représentée ci-après :



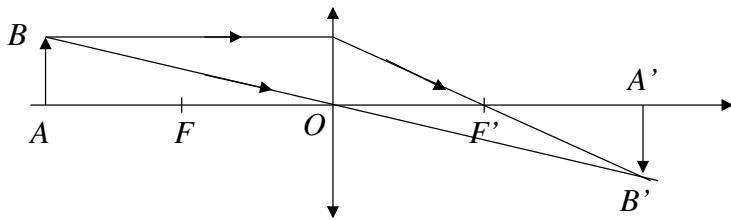
On constate que dans le domaine considéré  $X < -1$ , le minimum correspond à  $X = -2$  et  $X' = 2$ .

La distance minimale est donc associée à une situation symétrique pour laquelle la position de l'objet est telle que  $p = -2f'$  et celle de l'image est  $p' = 2f'$ , c'est à dire une distance minimale  $d = 4f'$ .

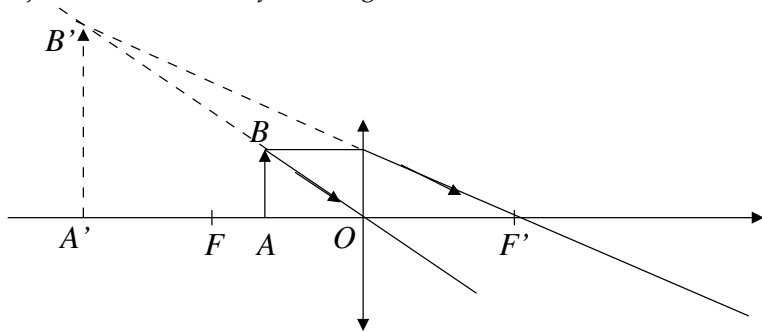
Cette situation correspond à la méthode de Silberman en focométrie.

#### 4.2.a. 2.c. Tracé :

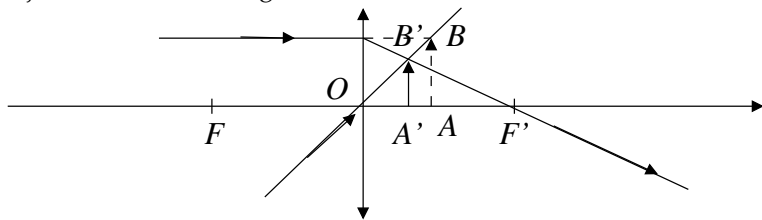
- L'objet est réel et  $OA > f'$  : l'image est réelle



– L'objet est réel et  $OA < f'$  : l'image est virtuelle



– L'objet est virtuel : l'image est réelle :



4.2.a. 2.d. Définition :  $\gamma = \frac{A'B'}{AB}$  ; Formule :  $\gamma = \frac{p'}{p}$

4.2.a. 2.e. Cette situation correspond au cas de la loupe, l'objet doit se situer entre la lentille et le foyer objet.

## 4.2.b. La lunette astronomique

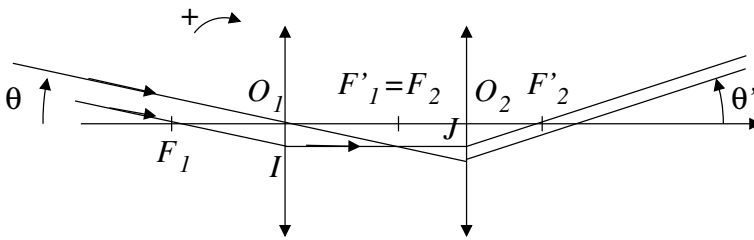
4.2.b. 1. Lunette afocale :

4.2.b. 1.a. Un système afocal ne possède pas de foyers, c'est à dire qu'un faisceau de rayons arrivant parallèlement à l'axe optique ressort du système parallèle à l'axe optique.

Pour une lunette astronomique, l'objet est à l'infini ; avec une image elle-aussi à l'infini, l'œil peut observer l'image sans accommoder.

4.2.b. 1.b. Pour que la lunette soit afocale, il faut que le foyer image de la lentille  $L_1$  soit confondu avec le foyer objet de la lentille  $L_2$ , donc  $O_1O_2 = f'_1 + f'_2$ .

4.2.b. 2. Tracé du faisceau incident :



4.2.b. 3. On considère la cas réaliste pour lequel  $\theta \ll 1$  rad et  $\theta' \ll 1$  rad.

$$\theta = \frac{O_1 I}{F_1 I} = \frac{O_1 I}{f'_1}$$

et

$$\theta' = -\frac{O_2 J}{O_2 F'_2} = -\frac{O_2 J}{f'_2}$$

On en déduit :

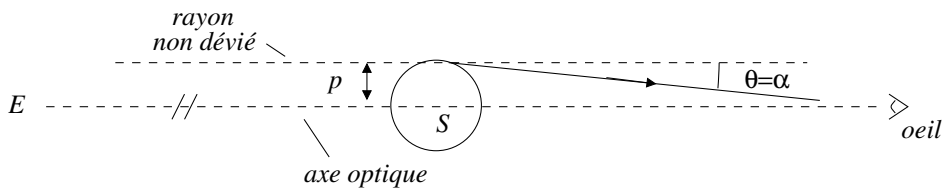
$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

Le grossissement est négatif, ce qui signifie que l'image, regardée à travers la lentille, sera renversée par rapport à une observation directe. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser une lentille de Galilée dont l'oculaire est une lentille divergente.

4.2.b. 4. Mesure de la déviation :

4.2.b. 4.a. D'après le schéma ci-dessous et la formule de l'énoncé (question 4.1.6),

$$\theta = \alpha = \frac{4G_N M}{pc^2}.$$



4.2.b. 4.b. Après traversée de la lunette :

$$\theta' = \frac{f'_1}{f'_2} \times \theta = \frac{f'_1}{f'_2} \times \frac{4G_N M}{pc^2} \simeq 1,1 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

L'œil ne peut distinguer que des angles supérieurs à 1' d'arc, c'est 1/60 de degré, soit  $3 \times 10^{-4}$  rad ; il n'est donc pas possible d'observer l'angle  $\theta'$  à l'œil nu.

4.2.b. 5. Observation et luminosité :

4.2.b. 5.a. L'image se forme certes à l'infini mais l'œil doit être positionné au niveau du cercle oculaire, image de la monture de l'objectif (lentille  $L_1$ ) par l'oculaire (lentille  $L_2$ ), il recevra alors le maximum de lumière car la totalité des rayons entrant dans la lunette ressortent en passant par le cercle oculaire.

**4.2.b. 5.b.** C'est la lentille  $L_1$  qui joue le rôle de diaphragme d'ouverture.

**4.2.b. 5.c.** L'objet, monture de la lentille  $L_1$ , est situé en  $O_1$  ; la position de l'image est notée  $C$  et la lentille qui réalise l'image est la lentille  $L_2$ , la relation de conjugaison s'écrit alors comme :

$$\frac{1}{\overline{O_2C}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

soit :

$$\overline{O_2C} = \frac{f'_2 \times \overline{O_2O_1}}{f'_2 + \overline{O_2O_1}} = \frac{f'_2 (f'_1 + f'_2)}{f'_1}$$

Notons que, dans une situation réaliste pour laquelle  $f'_1 \gg f'_2$ , on obtient  $\overline{O_2C} \simeq f'_2 \simeq 1 \text{ cm}$  (l'oculaire est une lentille de très courte focale). Il suffit donc en pratique de placer son œil directement contre l'oculaire pour observer une image lumineuse.

**4.2.b. 5.d.** En appliquant la formule de grandissement en valeur absolue :

$$\frac{d}{D} = \frac{O_2C}{O_2O_1} = \frac{f'_2}{f'_1} = \frac{1}{|G|}$$

Le diamètre du cercle oculaire est nettement inférieur au diamètre de la monture ce qui permet d'obtenir une concentration plus grande de la lumière.

**4.2.b. 5.e.** Cf. première question de cette partie. En plaçant son œil au cercle oculaire, l'observateur disposera d'une image nette, complète et lumineuse.

**FIN DE L'ÉPREUVE**