

Corrigé de l'épreuve B de 2007, agrégation de sciences physiques option chimie.

Vérot, M.

I. LE NOYAU ATOMIQUE. LA FISSION NUCLÉAIRE.

I.1. Terminologie.

I.1.1.

- I.1.1 a) – A : Nombre de masse, nombre de nucléons dans le noyau.
- Z : Numéro atomique : nombre de protons dans le noyau.
- $N = A - Z$: Nombre de neutrons dans le noyau.

I.1.1 b) ${}^2_1\text{H}$ Deutérium / Hydrogène : 1 proton, 1 nucléon, 1 électron.

I.1.2.

- Noyaux isotopes : même Z , de A différents (hydrogène, deutérium, tritium)
- Noyaux isobares : même A , de Z différents (${}^{14}_6\text{C}$, ${}^{14}_7\text{N}$)

I.1.3.

- Fission nucléaire : un élément père se scinde en deux sous unités.
- Fission spontanée : la fission a lieu sans absorption préalable d'un corpuscule.
- Fission induite : la fission a lieu après absorption d'un corpuscule (un neutron en général)

I.1.4.

- Noyau fissile : isotope pour lequel il peut y avoir fission spontanée.
- Noyau fertile : isotope pour lequel il peut y avoir fission induite.

I.2. Énergie nucléaire.

I.2.1.

I.2.1 a) $E = mc^2$ il y a équivalence masse énergie pour une particule au repos dans le cadre de la relativité restreinte.

$$\text{I.2.1 b) } 1 \frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,783 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \quad 1 \text{ kg} = 5,610 \cdot 10^{29} \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\text{I.2.1 c) } m_H = 1,673536 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938,6068 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$m_e + m_p = 938,783 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Normalement, la différence est égale à $13,6 \text{ eV}$ ce qui est l'énergie de liaison de l'électron.

I.2.2.

I.2.2 a) $B_1(A, Z)$ représente la masse perdue grâce à l'énergie de liaison due à l'interaction forte.

I.2.2 b) Dans $B(A, Z)$, on ajoute les termes électroniques, ces énergies de liaisons sont de l'ordre du keV alors qu'en physique nucléaire, l'ordre de grandeur est plutôt le MeV

I.2.3.

I.2.3 a) Il y a conservation du nombre de protons et de neutrons. $A = A' + A'' \quad Z = Z' + Z''$

I.2.3 b) Il y a conservation de l'énergie : $B = B' + B'' - Q$ la réaction est spontanée si on libère de l'énergie donc si Q est positif. $Q = B' + B'' - B$, cette énergie est dissipée sous forme d'énergie cinétique.

$$\text{I.2.3 c) } B(235, 92) = 1767,54 \text{ MeV} = 92 \times 938,6068 + (235 - 92) \times 939,565 - 235,044 \times 931,494$$

$$B(140, 54) = 1153,650 \text{ MeV}$$

$$B(93, 38) = 793,368 \text{ MeV}$$

$$Q = B(140, 54) + B(93, 38) + 2m_N - B(235, 92) = 2058,608 \text{ MeV} > 0$$

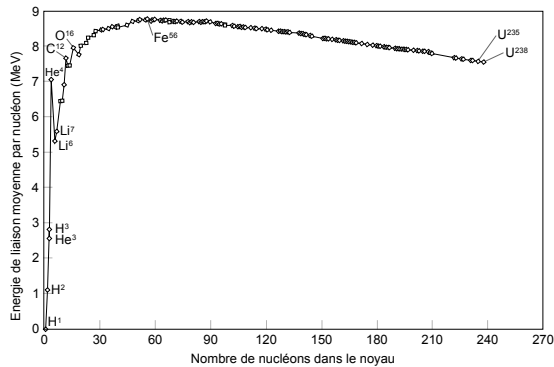
$$E = Q \times N_A = 7,75 \cdot 10^{45} \text{ J} = 1,68 \cdot 10^{30} \text{ M tonne de TNT}$$

C'est une énergie colossale. A titre de comparaison, la plus grosse bombe nucléaire (Tsar Bomba) faisait 57 Mtonne de TNT.

I.2.4.

I.2.4 a) Cette courbe représente l'énergie de liaison par nucléon.

I.2.4 b) C'est la courbe d'Aston.



I.2.4 c) Au cours d'une fission, on diminue A , pour qu'il y ait un gain énergétique au cours de la fission, il faut donc être à droite du maximum de la courbe (^{56}Fe)

I.3. Modèle de la goutte du noyau atomique. Formule de Bethe Weissäcker.

I.3.1.

I.3.1 a) r_0 représente le rayon d'un noyau d'hydrogène. $V_0 \approx 4.10^{-36} \text{ m}^3$ serait le volume du noyau d'hydrogène.

I.3.1 b) $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad S = 4\pi R^2 = 4\pi r_0^2 A^{\frac{2}{3}}$

I.3.2. Terme de volume : $a_V A$ (linéaire en A comme le volume)

I.3.3. Il y a un effet de surface ils ont moins d'interactions avec leurs voisins. ("tension de surface")

$-a_S A^{\frac{2}{3}}$ (proportionnel à S) Le signe - indique une perte d'énergie vu le manque d'interaction avec leurs voisins.

I.3.4. Pour une boule électrostatique uniformément chargée : $E = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2}{R}$ On en déduit $\beta = 2$ et $\gamma = \frac{1}{3}$ ce terme est lié à la répulsion électrostatique entre proton. Cette interaction est déstabilisante comme pour le terme de surface.

I.3.5. On peut voir que le terme de symétrie est minimal (nul) lorsque $Z=N$. (Attention, ici, si on dérive par rapport à Z le terme donné, A est également une fonction de Z)

I.3.6.

I.3.6 a) $B(A, Z) = a_V A - a_S A^{\frac{2}{3}} - a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_{Sy} \frac{(A - 2Z)^2}{A}$ en théorie, il y a encore un terme lié à la parité de A et Z à ajouter.

I.3.6 b) $A.N.B^{calc} = 1\,795,52 \text{ MeV}$ soit un écart de 1,5% avec la valeur donnée à la question I.2.3 c. (Ici, le terme de parité oublié est nul)

I.3.6 c) La précision de l'énergie est de l'ordre de 1% hors cas exceptionnels (nombres magiques pour A et Z)

I.4. Stabilité des noyaux vis-à-vis de la fission.

I.4.1.

I.4.1 a) En fixant A , on a une parabole dont la concavité est vers le bas avec un maximum pour Z_{stable} .

$$B(Z; A) = \left(-\frac{a_C}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{4a_{Sy}}{A} \right) Z^2 + 4a_{Sy}Z + \delta$$

I.4.1 b) $\frac{\partial B}{\partial Z} = 2Z \left(-\frac{a_C}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{4a_{Sy}}{A} \right) + 4a_{Sy}$

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = 0 \iff Z_{\text{stable}} = \frac{4a_{Sy}}{2 \left(\frac{a_C}{A^{\frac{1}{3}}} + \frac{4a_{Sy}}{A} \right)} = \frac{A}{2 \left(\frac{a_C A^{\frac{2}{3}}}{4a_{Sy}} + 1 \right)}$$

I.4.1 c) Si on ré-exprime $A - Z_{\text{stable}}$ en fonction de Z_{stable} on retrouve la courbe de la figure 1. L'excès de neutron est dû à la répulsion coulombienne augmente en Z^2 .

I.4.1 d) $A.N. Z_{\text{stable}} = 91$ On est proche de l'uranium dont l'isotope 235 a une période proche de 700 millions d'années.

I.4.2.

I.4.2 a) $Q = B' + B'' - B$ le terme de symétrie est nul ici et $Z_i = \frac{A_i}{2}$

$$Q = -a_V (A - A' - A'') + a_S (A^{\frac{2}{3}} - A'^{\frac{2}{3}} - A''^{\frac{2}{3}}) + a_C \left(\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - \frac{Z'^2}{A'^{\frac{1}{3}}} - \frac{Z''^2}{A''^{\frac{1}{3}}} \right)$$

Le premier terme est nul vu qu'il y a conservation de neutron.

I.4.2 b) $Q = a_S (A^{\frac{2}{3}} - A_1^{\frac{2}{3}} - (A - A_1)^{\frac{2}{3}}) + \frac{a_C}{4} (A^{\frac{5}{3}} - A_1^{\frac{5}{3}} - (A - A_1)^{\frac{5}{3}})$ L'expression est symétrique en A_1 et $A - A_1$,

le minimum est donc atteint lorsque $A_1 = A - A_1 = \frac{A}{2}$.

$$Z_1 = \frac{Z}{2} \quad R_1 = 2^{\frac{1}{3}} r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad S_1 = 4\pi 2^{\frac{2}{3}} r_0^2 A^{\frac{2}{3}}$$

$$Q = a_S A^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \right) + a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - 2 \times \frac{\left(\frac{1}{2} \right)^2}{\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}} \right) = a_S A^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2^{\frac{1}{3}} \right) + a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}} \right)$$

Le premier terme est négatif : en effectuant la fusion, on augmente la surface, ce qui coûte sur le plan énergétique. Le deuxième terme est positif car en effectuant la fission, on diminue fortement la répulsion électronique, on augmente donc l'énergie libérée.

I.4.2 c)

I.4.2 c) i) $E_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1^2 e^2}{r}$ Il s'agit d'une hyperbole.

Pour $r < 2R_1$ l'interaction forte prend le dessus.

I.4.2 c) ii) $E_c(2R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1^2 e^2}{2R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1^2 e^2}{2r_0 A_1^{\frac{1}{3}}}$ L'énoncé n'est pas très clair si une valeur numérique est attendue.

I.4.2 c) iii) La fission se produit si l'énergie dégagée est supérieure à la barrière de potentiel à franchir : (on exprime Z_1 et A_1 en fonction de Z et A .)

$$a_S A^{\frac{2}{3}} \left(1 - 2^{\frac{1}{3}} \right) + a_C \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}} \right) \geq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z^2 e^2}{2r_0} \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{Z^2}{A} \left(a_C \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}} \right) - \frac{e^2 2^{\frac{1}{3}}}{2^3 r_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right) \geq -a_S \left(1 - 2^{\frac{1}{3}} \right)$$

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{-a_S \left(1 - 2^{\frac{1}{3}} \right)}{\left(a_C \left(1 - 2^{-\frac{2}{3}} \right) - \frac{e^2 2^{-\frac{8}{3}}}{r_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)} = K$$

I.4.2 c) iv) $K = 54$ (l'énoncé donne la valeur de $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ en $MeV \cdot fm$) On en déduit $A_{\text{fission}} = 216$ Une valeur plus réaliste serait de 140. Le modèle de la goutte liquide est ici trop limité.

II. CINÉTIQUE DE LA "PILE PONCTUELLE"

II.1. Milieu multiplicateur simple.

II.1.1. $k_\infty = w_1 w_2 v$ En pratique, on contrôle w_1 avec des barres de contrôle contenant du bore 10.

II.1.2. $n(t + \tau_0) = k_\infty n(t)$

II.1.3. $\frac{dn}{dt} \approx \frac{n(t + \tau_0) - n(t)}{\tau_0} = n(t) \frac{k_\infty - 1}{\tau_0}$

II.1.4.

II.1.4 a) $\frac{dn}{dt} = n(t) \frac{1}{T_0}$ T_0 est la constante de temps du système. La résolution de l'équation différentielle donne $n(t) = n_i \exp\left(\frac{t}{T_0}\right)$

II.1.4 b) Si $k_\infty > 1$ on a une exponentielle divergente car T_0 est positif. En effet, après chaque cycle on augmente le nombre de neutrons dans le milieu.

Si $k_\infty < 1$ on a une exponentielle qui tend vers 0. En effet, après chaque cycle on perd des neutrons.

II.1.5. A.N. : $T_0 = 2 \text{ s}$ on a bien $T_0 \gg \tau_0$, le temps caractéristique d'évolution du système est beaucoup plus grand que τ_0 . Pour $t = 5 \text{ s}$ le rapport vaut $e^{\frac{5}{2}} \approx 12,2$. L'évolution étant exponentielle, le contrôle pour avoir $n(t)$ relativement constant de manière à avoir un système stable est extrêmement difficile, le moindre écart demande d'avoir un temps de réaction extrêmement rapide avant d'avoir une catastrophe.

II.2. Prise en compte des neutrons retardés. Équation de Nordheim.

II.2.1. On a un noyau précurseur qui suit une désintégration β on a donc $\frac{dC}{dt} = -\lambda_1 C(t)$ et $C(t) = C_i \exp(-\lambda_1 t)$

II.2.2.

II.2.2 a) $n(t + \tau_0) = (1 - \beta)k_\infty n(t)$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{k_\infty(1 - \beta) - 1}{\tau_0} n(t)$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{k_\infty \beta}{\tau_0} n(t)$$

II.2.2 b) Il faut corriger le nombre de neutrons produits qui est augmenté de ceux provenant de la désintégration. La population du précurseur est diminuée de la population de précurseurs ayant réagit.

II.2.3. La solution est stationnaire si $\frac{dC}{dt} = \frac{dn}{dt} = 0$. En additionnant les deux équations, on voit que les termes en $C(t)$ se simplifient et qu'il faut que $k_\infty = 1$

II.2.4.

II.2.4 a) En additionnant les deux équations et en conservant la seconde on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \omega(n + C)(t) = \frac{k_\infty - 1}{\tau_0} n(t) \\ \omega C(t) = \frac{k_\infty \beta}{\tau_0} n(t) - \frac{C(t)}{\tau_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega n(t) \left(1 + \frac{k_\infty \beta}{\tau_0} \frac{1}{\omega + \frac{1}{\tau_1}} \right) = \frac{k_\infty - 1}{\tau_0} n(t) \\ C(t) \left(\omega + \frac{1}{\tau_1} \right) = \frac{k_\infty \beta}{\tau_0} n(t) \end{cases}$$

Il faut que l'équation de Nordheim soit vérifiée pour que la première équation soit satisfaite :

$$k_\infty - 1 = \omega \tau_0 + \frac{k_\infty \beta \omega \tau_1}{1 + \omega \tau_1}$$

II.2.4 b) θ et δ s'expriment en seconde.

$$k_\infty - 1 = \omega \tau_0 + \frac{k_\infty \beta \omega \tau_1}{1 + \omega \tau_1} \iff (1 + \omega \tau_1)(k_\infty - 1) = (1 + \omega \tau_1) \omega \tau_0 + k_\infty \beta \omega \tau_1$$

$$k_\infty - 1 = \omega^2 \tau_1 \tau_0 + \omega (\tau_0 + \tau_1 (1 - k_\infty (1 - \beta)))$$

On retrouve alors les expressions demandées.

II.2.4 c) On calcule le discriminant qui vaut $4\Delta = 4(\delta^2 + \theta^2) > 0$ les solutions possibles sont $\omega_1 = \frac{-\theta + \sqrt{\Delta}}{\delta^2}$ et $\omega_2 =$

$$\frac{-\theta - \sqrt{\Delta}}{\delta^2}. \omega_1 \text{ est forcément positif car } \sqrt{\Delta} > \theta (\delta^2 \neq 0 \text{ car } k_\infty > 1).$$

$$T_1 = \frac{\delta^2}{-\theta + \sqrt{\Delta}}$$

II.2.4 d) – Si $\theta > 0$ On fait un développement limité au 1er ordre en $\frac{\delta}{\theta}$:

$$\sqrt{\Delta} \approx \theta \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^2 \right)$$

On a alors $T_1 \approx 2\theta$

– Si $\theta < 0$ On fait un développement limité au 1er ordre en $\frac{\delta}{\theta}$:

$$\sqrt{\Delta} \approx -\theta \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta}{\theta} \right)^2 \right)$$

$$\text{On a alors } T_1 \approx \frac{\delta^2}{-2\theta - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\theta}} \approx -\frac{\delta^2}{2\theta} \ll 1$$

II.2.4 e) Si l'inégalité n'est pas vérifiée, on a alors $\theta < 0$ ce qui veut dire que n et C vont évoluer exponentiellement vers l'infini avec une constante de temps très petite car $T_1 \ll 1$. Le système va alors exploser très rapidement.

II.2.4 f) A.N. $T_1 \approx 2\theta = 114 \text{ s}$ $\delta^2 = 160 \text{ s}^2$

On a bien $\delta^2 \ll \theta^2$ et la constante de temps T_1 est suffisamment longue pour pouvoir contrôler le réacteur.

III. SECTIONS EFFICACES ET TAUX DE RÉACTION.

III.1. Section efficace.

III.1.1. $dN_{inc} = \phi dS dt$

III.1.2.

III.1.2 a) $dN_{diff} = \sigma C dN_{inc} dx = \phi \sigma C dt dS dx$

$$\tau = \frac{dN_{diff}}{dt dS dx} = \phi \sigma C$$

III.1.2 b) $[\phi] = \frac{LT^{-1}}{L^3}$ $[\sigma] = L^2$ $[C] = L^{-3}$

On en déduit :

$$[\tau] = \frac{T^{-1}}{L^3} \text{ qui est homogène à un nombre de réaction par unité de temps et de volume.}$$

III.1.3. $\phi = nv = n \sqrt{\frac{2E_{th}}{m_n}} = 10^{13} \sqrt{\frac{2 \times 0,025 \times 1,60218 \cdot 10^{-19}}{1,783 \cdot 10^{-30} \times 939,565}} = 2,187 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1}$

$$\sigma = 680,8 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

$$C = \frac{\rho U}{M_U} \times \mathcal{N}_A \times 0,007 = \frac{18,95 \cdot 10^3}{238,03 \cdot 10^{-3}} \times 6,0221 \cdot 10^{23} \times 0,007 = 3,356 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

$$\tau = 4,997 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3} \cdot \text{s}^{-1}$$

III.2. Section macroscopique.

III.2.1. Σ est homogène à l'inverse d'une longueur. Cette grandeur s'exprime donc en m^{-1} .

$$\Sigma = 22,85 \text{ m}^{-1}$$

III.2.2. On fait un bilan sur une tranche d'épaisseur dx et de section dS pendant dt :

$$\phi(x + dx) dS dt = \phi(x) dS dt - \phi(x) \Sigma dS dx dt$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = -\Sigma \phi(x)$$

III.2.3.

III.2.3 a) On en déduit (avec la condition initiale $\phi(0)$ connue) : $\phi(x) = \phi(0) \exp(-\Sigma x)$

III.2.3 b) $\frac{1}{\Sigma}$ représente la distance caractéristique de l'atténuation du flux neutronique.

III.2.3 c) Ici $\Sigma = 4,38 \text{ cm}$ ce qui est une longueur raisonnable pour une barre d'uranium.

III.2.4. Il faut alors sommer pour les différents atomes i :

$$\Sigma = \sum_i \Sigma_i$$

III.3. Diffusion isotrope.

III.3.1. $2i + \theta_{CM} = \pi$

$$b = R \sin(i) = R \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_{CM}}{2}\right) = R \cos\left(\frac{\theta_{CM}}{2}\right)$$

III.3.2. $dN = 2\pi b db \phi$

III.3.3. $db = -R \sin\left(\frac{\theta_{CM}}{2}\right) \frac{d\theta_{CM}}{2}$

$$dN = 2\pi \phi R \cos\left(\frac{\theta_{CM}}{2}\right) \times -R \sin\left(\frac{\theta_{CM}}{2}\right) \frac{d\theta_{CM}}{2} = \phi \frac{\pi R^2}{2} \sin(\theta_{CM}) d\theta_{CM}$$

Note : $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$

$$\text{III.3.4. } N = \int_0^\pi dN = \phi\pi R^2$$

III.3.5. $\frac{dN}{d\alpha} = \phi\pi \frac{R^2}{2}$ qui est indépendant de α . La diffusion est alors indépendante de la direction donc isotrope dans le RCM.

IV. RALENTISSEMENT DES NEUTRONS.

IV.1. Collision élastique des neutrons.

IV.1.1.

IV.1.1 a) L'énergie cinétique des neutrons est de l'ordre du MeV alors que l'énergie thermique est de l'ordre de $1/40 eV$. De plus, les énergies de liaisons sont également beaucoup plus faibles. Les noyaux modérateurs sont donc au repos et libres.

IV.1.1 b) $\vec{V}_{CM} = \frac{1}{m_n + m_A} (m_n \vec{v}_n + m_A \vec{v}_A) \approx \frac{m_n}{m_n + m_A} \vec{v}_n = \frac{1}{1+A} \vec{v}$ Le RCM est le repère au barycentre du système neutron, noyau diffuseur

IV.1.1 c) $\vec{v}' = \vec{V}_{CM} + \vec{u}'$

IV.1.1 d) $\vec{U}' = -\vec{V}_{CM} = -\frac{1}{1+A} \vec{v}$ $\vec{u}' = \vec{v}' - \vec{V}_{CM} = \frac{A}{1+A} \vec{v}$

IV.1.2.

IV.1.2 a) $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$

IV.1.2 b) Conservation de l'impulsion : $\vec{p} + \vec{P} = \vec{p}' + \vec{P}' = m_n \vec{u}' + m_A \vec{U}' = \vec{0}$

Conservation de l'énergie : $\frac{\vec{p}^2}{2m_n} + \frac{\vec{P}^2}{2m_A} = \frac{\vec{p}'^2}{2m_n} + \frac{\vec{P}'^2}{2m_A}$

IV.1.2 c) Pour $p = P$, et $p' = P'$ la condition est automatiquement vérifiée vu le choix du référentiel. (c'est la définition du référentiel du centre de masse). En utilisant cette relation dans la conservation de l'énergie, on trouve : $\vec{p}^2 \left(\frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_A} \right) = \vec{p}'^2 \left(\frac{1}{2m_n} + \frac{1}{2m_A} \right)$. On en déduit $p = p'$ et donc l'égalité demandée.

IV.1.3.

IV.1.3 a) $\hat{\Delta}$ Il y a une erreur dans l'énoncé à propos de \vec{u}' qui est à la fois le vecteur unitaire de \vec{p}' et la vitesse après le choc du neutron. Dans la question IV.1.3, il faut remplacer \vec{u}' par \vec{n}' pour le vecteur unitaire $\frac{\vec{p}'^j}{p'}$.

$\vec{p}' = p' \vec{n}' = m_n u' \vec{n}'$ et $\vec{p} = p \vec{n} = m_n u \vec{n}$. Comme $p' = p$, on a alors $u' = u = \frac{A}{1+A} v$. De même vu que $\vec{p}' + \vec{P}' = \vec{0}$ on en déduit $\vec{U}' = -\frac{1}{1+A} v \vec{n}'$.

IV.1.3 b) Il faut ajouter \vec{V}_{CM} à \vec{u}' et \vec{U}' pour obtenir le résultat demandé.

IV.1.3 c) θ_L est l'angle entre \vec{v} et \vec{v}' . Donc l'angle entre \vec{n} et $\vec{n} + A \vec{n}'$

$\vec{n} \cdot (\vec{n} + A \vec{n}') = \|\vec{n} + A \vec{n}'\| \cos(\theta_L) = 1 + A \cos(\theta_{CM})$

On en déduit : $\cos(\theta_L) = \frac{1 + A \cos(\theta_{CM})}{1 + A^2 + 2A \cos(\theta_{CM})}$

IV.2. Ralentissement des neutrons.

IV.2.1. $E = \frac{v^2}{2m_n} = \frac{v^2}{2}$

$E' = \frac{v'^2}{2m_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{v^2}{(1+A)^2} + \frac{A^2 v^2}{(1+A)^2} + 2 \frac{Av^2}{(1+A)^2} \cos(\theta_{CM}) \right) = E \frac{1 + A^2 + 2A \cos(\theta_{CM})}{(1+A)^2}$

$E'_{max} = E$ si $\cos(\theta_{CM}) = 1$ (pas de diffusion) et $E'_{min} = E \left(\frac{1-A}{1+A} \right)^2$ si $\cos(\theta_{CM}) = -1$ (rétrodiffusion).

IV.2.2. $\zeta = \frac{2A(1 - \cos(\theta_{CM}))}{(1+A)^2}$

IV.2.3. Si la diffusion est isotrope, $\bar{E}' = E \frac{1+A^2}{(1+A)^2}$.

IV.2.4. $\bar{\zeta} = \frac{2A}{(1+A)^2}$ Si on trace $\zeta = f(A)$ on voit que la fonction décroît pour $A > 1$, il faut donc un modérateur relativement léger ce qui est le cas pour un proton de l'eau.

IV.3. Notion de léthargie.

IV.3.1. $\Delta\bar{\zeta} = \ln\left(\frac{E}{E'}\right) = \ln\left(\frac{(1+A)^2}{1+A^2+2A\cos(\theta_{CM})}\right)$

IV.3.2. Il vaut alors $n\Delta\bar{\zeta}$. On veut que $n\Delta\bar{\zeta} = \ln\left(\frac{E_{fission}}{E_{therm}}\right)$

IV.3.3. On obtient n de l'ordre de 18 car $\Delta\bar{\zeta} = 1$ et $\ln\left(\frac{E_{fission}}{E_{therm}}\right) = 18,2$.

IV.4. Courant de ralentissement.

IV.4.1. On a vu que ζ était indépendant de E à la question IV.2.2.

IV.4.2. Le taux de disparition des neutrons vaut $\Sigma_s(E)\phi(E)dE$.

IV.4.3. En régime stationnaire, le taux de disparition des neutrons est indépendant du temps. On a donc la relation demandée.

IV.4.4.

IV.4.4 a) En divisant la relation obtenue en IV.4.3 par EE' et en utilisant la relation de la question IV.4.1. On a $\Sigma_s(E)\phi(E)\frac{1}{E'} = \Sigma_s(E')\phi(E')\frac{1}{E}$ En re-multipliant par EE' on obtient la relation souhaitée.

IV.4.4 b) $n_e(E)$ doit au départ être une courbe de type gaussienne piquée vers $E_{fission}$. Au cours du ralentissement, le maximum de la gaussienne doit se déplacer vers des énergies plus faibles et l'étalement doit augmenter.

V. DIFFUSION DES NEUTRONS THERMIQUES.

V.1. Loi de Fick.

V.1.1. $J_x = J_+ - J_-$

V.1.2.

V.1.2 a) $dN_{diff} = \frac{1}{2}\Sigma_s\phi(x)dtSdx$ (cf III.1.2 a) le facteur $\frac{1}{2}$ est là pour indiquer que seulement la moitié des neutrons diffuse vers la gauche.

V.1.2 b) $dN_{reçus} = dN_{diff} \exp(-\Sigma_t x)$ (cf III.2.3 a) $dN_{reçus} = \frac{1}{2}\Sigma_s\phi(x) \exp(-\Sigma_t x)dtSdx$

V.1.2 c) $J_- = \int_0^\infty \frac{dN_{reçus}}{dtS} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Sigma_s\phi(x) \exp(-\Sigma_t x)dx$

V.1.2 d) $J_+ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \Sigma_s\phi(x) \exp(+\Sigma_t x)dx$ On change les bornes d'intégration et le signe dans l'exponentielle.

V.1.3.

V.1.3 a) On fait un développement limité de $\phi(x)$: $\phi(x) = \phi(0) + x \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0}$ puis on intègre en sachant qu'une primitive de $x \exp(-x)$ est $-(1+x) \exp(-x)$ (Sinon on intègre par partie).

$$J_- = \frac{\Sigma_s}{2} \int_0^\infty \left(\phi(0) + x \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} \right) \exp(-\Sigma_t x) dx = \frac{\Sigma_s}{2} \left(\frac{\phi(0)}{\Sigma_t} + \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} \int_0^\infty x \exp(-\Sigma_t x) dx \right)$$

$$J_- = \frac{\Sigma_s}{2} \left(\frac{\phi(0)}{\Sigma_t} + \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} \frac{1}{\Sigma_t^2} \right)$$

V.1.3 b) $J_+ = \frac{\Sigma_s}{2\Sigma_t} \left(\phi(0) - \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} \frac{1}{\Sigma_t} \right)$

V.1.3 c) $J_x = -D \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0} = -\frac{\Sigma_s}{\Sigma_t^2} \frac{d\phi}{dx}\Big|_{x=0}$ On en déduit $D = \frac{\Sigma_s}{\Sigma_t^2}$.

V.1.3 d) Il faudrait faire un développement limité à des ordres supérieurs pour obtenir le coefficient $\frac{1}{3}$.

V.1.3 e) $\vec{J} = -D \overrightarrow{\text{grad}}(\phi)$

V.2. Équation bilan des neutrons.

$$V.2.1. \frac{dN}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} S dx = \frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} S dx$$

$$V.2.2. \frac{dN_1}{dt} = J(x, t) S - J(x + dx) S = -S \frac{\partial J}{\partial x} dx$$

$$V.2.3. \frac{dN_2}{dt} = \Sigma_a \phi(x, t) S dx$$

$$V.2.4. \underbrace{\frac{dN}{dt}}_{\text{variation du nombre de neutrons dans la tranche}} = \underbrace{\frac{dN_1}{dt}}_{\text{neutrons entrants/sortants par diffusion}} - \underbrace{\frac{dN_2}{dt}}_{\text{neutrons absorbés}} + \underbrace{R(x, t) dV}_{\text{neutrons créés}}$$

On en déduit en divisant par $S dx$ (pour obtenir des grandeurs volumiques) :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial J(x, t)}{\partial x} - \Sigma_a \phi(x, t) + R(x, t)$$

V.3. Équation d'un milieu multiplicateur simple.

V.3.1. Le nombre de neutrons créés par unité de temps et de volume s'écrit : $\nu \Sigma_f \phi(x, t)$

Le nombre de neutrons absorbés par unité de temps et de volume s'écrit : $\Sigma_a \phi(x, t)$

En faisant le rapport des deux quantités, on trouve bien la relation demandée.

$$V.3.2. R(x, t) = \nu \Sigma_f \phi(x, t)$$

V.3.3. On divise la relation obtenue en V.2.4 par Σ_a et on remplace le terme diffusif grâce à l'équation obtenue en V.1.3 c
Pour obtenir l'équation demandée :

$$\frac{1}{\Sigma_a} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = M^2 \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + (k_\infty - 1) \phi(x, t)$$

V.4. Conditions au bord.

V.4.1. On peut voir que la condition mixte équivaut à $J_-(x_b) = 0$ grâce à la question V.1.3 a.

V.4.2.

$$V.4.2 a) d_e = \frac{1}{\Sigma_t} \text{ car } \phi(x) = \phi(x_b) + (x - x_b) \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x=x_b} \text{ pour } x > x_b \text{ qui s'annule par définition en } x_b + d_e = x_b + \frac{1}{\Sigma_t}.$$

V.4.2 b) Σ est de l'ordre de 5 cm qui est négligeable par rapport à 1 m .

V.5. Taille critique.

V.5.1. On se place en régime stationnaire. On veut donc résoudre l'équation : $\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} + \frac{(k_\infty - 1)}{M^2} \phi(x) = 0$

On suppose $k_\infty - 1 > 0$. On alors une équation de la forme $y'' + \mu^2 y = 0$ qui a pour solution les fonctions de la forme $\phi(x) = F \sin(\mu x) + G \cos(\mu x)$ avec $\mu = \sqrt{\frac{(k_\infty - 1)}{M^2}}$

V.5.2.

V.5.2 a) $\phi(0) = 0$. On en déduit que $G = 0$.

V.5.2 b) $\phi(L) = 0$. On en déduit que $\sin(\mu L) = 0$ et donc que μ doit prendre des valeurs discrètes telles que $\mu_n L = 0[\pi]$

V.5.2 c) Il ne doit pas y'avoir plus d'une demi oscillation dans le matériau pour que ϕ soit toujours positif, on en déduit $\mu = \frac{\pi}{L}$

V.5.3.

$$V.5.3 a) L_c = \frac{\pi M}{\sqrt{k_\infty - 1}}$$

$$V.5.3 b) L_c = \frac{\pi \times 10^{-2}}{\sqrt{10^{-2}}} = 31,4 \text{ cm}$$

V.5.4.

V.5.4 a)

V.5.4 b) $P(x)$ est le produit du nombre de réaction de fission par unité de temps et de volume par l'énergie récupérable par fission. $P(x) = \phi(x) \Sigma_f E_f$

$$V.5.4 c) P_t = \Sigma_f E_f \int_0^L \phi(x) dx = \Sigma_f E_f \phi_0 \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx = \Sigma_f E_f \phi_0 \frac{2L}{\pi}$$

$$V.5.4 d) P_t = 40 \times 180.10^6 \times 3.10^{16} \times 2 \times 31,4.10^{-2} \frac{1}{\pi} \times 1,602.10^{-19} = 6,92.10^6 \text{ J.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$$

V.6. Régime non stationnaire.

V.6.1. $[\omega_0] = \emptyset LT^{-1}L^{-1} = T^{-1}$ (ici, v est la vitesse du faisceau de neutrons)
 ω_0 est homogène à une pulsation.

V.6.2. $\phi(x, t) = \sum_n A_n \sin(\mu_n x) f_n(t)$

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \sum_n A_n \sin(\mu_n x) f'_n(t)$$

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \sum_n A_n \mu_n \cos(\mu_n x) f_n(t)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} = - \sum_n A_n \mu_n^2 \sin(\mu_n x) f_n(t)$$

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \frac{\omega_0 L_c^2}{\pi^2} \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0 \phi(x, t) \iff \sum_n A_n \sin(\mu_n x) \left(\omega_0 \left(1 - \frac{L_c^2 \mu_n^2}{\pi^2} \right) f_n(t) - f'_n(t) \right) = 0$$

$$\iff \omega_0 \left(1 - \frac{L_c^2 \mu_n^2}{\pi^2} \right) f_n(t) - f'_n(t) = 0 \text{ si } A_n \neq 0$$

V.6.3. Pour que la condition précédente soit satisfaite, il faut que les fonctions f_n soient de la forme proposée avec

$$\omega_n = \omega_0 \left(1 - \frac{L_c^2 \mu_n^2}{\pi^2} \right) \quad \mu_n = \frac{n\pi}{L} \implies \omega_n = \omega_0 \left(1 - n^2 \frac{L_c^2}{L^2} \right)$$

V.6.4. Si $\frac{L_c}{L} > 1$, les ω_n sont négatifs, la solution est donc décroissante dans le temps. A l'inverse, si $\frac{L_c}{L} < 1$, il existe un ensemble fini de ω_n tels que la solution soit divergente et si les A_n associés sont non nuls, alors $\phi(x, t)$ croît exponentiellement avec le temps.

V.6.5. Pour de grandes valeurs de t , on aura $\phi(x, t) \sim A_1 \sin(\mu_1 x) \exp(\omega_1 t)$. La solution va diverger vers plus l'infini. Comme dans le II, on peut avoir un comportement divergent ou non du système en fonction des paramètres choisis pour l'évolution du système.

VI. GÉNÉRATION DU COURANT. MACHINE SYNCHRONE.

VI.1. Champ magnétique créé par le rotor (champ exciteur).

VI.1.1. Le système est invariant par translation selon OX et par rotation autour de cet axe, on a donc $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(r)$.
 \vec{B} est perpendiculaire au plan OYZ qui est un plan de symétrie (on aurait pu dire que \vec{B} appartient à tout plan contenant OX , ce qui revient au même), on a donc $\vec{B}(r) = B(r)\vec{e}_X$.

VI.1.2. On applique le théorème d'Ampère sur trois contours différents :

- Un contour 1 de longueur l totalement inclut dans le solénoïde.
- Un contour 2 de longueur l totalement extérieur au solénoïde.
- Un contour 3 de longueur l entourant le solénoïde.

Pour les contour 1 et 2 : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{M} = 0$. On en déduit que $B(r)$ est constant dans chacun de ces deux domaines :

$$B(r) = \begin{cases} B_{ext} = 0 & \text{si } r > a \\ B_{int} & \text{si } r < a \end{cases}$$

Le fait que $B_{ext} = 0$ est donné dans l'énoncé, mais on aurait pu le justifier en indiquant que sinon l'énergie électromagnétique serait infinie.

Pour le contour 3 : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{M} = \mu_0 \mu_r n_r I_r l = (B_{int} - B_{ext}) l$

On en déduit $B_{int} = \mu_0 \mu_r n_r I_r$

$$B(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r > a \\ B_0 = \mu_0 \mu_r n_r I_r & \text{si } r < a \end{cases}$$

VI.2. Tensions statoriques induites à vide.

VI.2.1.

VI.2.1 a) $\Psi_x(t) = \Omega t \quad \Psi_y(t) = \frac{\pi}{2} + \Omega t$

VI.2.1 b) $\Phi_1^r = N_s S B_0 \vec{e}_X(t) \cdot \vec{e}_y = N_s S B_0 \sin(\Omega t)$ On en déduit $\Phi_2^r = N_s S B_0 \sin\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ $\Phi_3^r = N_s S B_0 \sin\left(\Omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$

VI.2.2.

VI.2.2 a) La force électromotrice dans un circuit fermé C est égale à l'opposé de la variation du flux du champ magnétique à travers ce circuit :

$$e_i = -\frac{d\Phi_i}{dt}$$

$$\text{VI.2.2 b) } e_1 = -N_s S B_0 \cos(\Omega t) \quad e_2 = -N_s S B_0 \cos\left(\Omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad e_3 = -N_s S B_0 \cos\left(\Omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

VI.2.2 c) Il faut que les parties réelles soient identiques à celles obtenues à la question précédente, on en déduit :

$$E_0 = -N_s S B_0 \quad \Psi_1 = 0 \quad \Psi_2 = -\frac{2\pi}{3} \quad \Psi_3 = -\frac{4\pi}{3}$$

VI.2.3.

$$\text{VI.2.3 a) } e_{12} = e_1 - e_2 \quad e_{23} = e_2 - e_3 \quad e_{31} = e_3 - e_1$$

VI.2.3 b)

$$\text{VI.2.3 c) } \underline{e}_{12} = E_0 \exp(j\Omega t) \left(1 - \exp\left(-j\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \sqrt{3}E_0 \exp\left(j\left(\Omega t + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

e_{12} est déphasé de $\frac{\pi}{6}$ par rapport à e_1 .

$$\text{VI.2.3 d) } B_0 = \mu_0 \mu_r n_r I_r = 4\pi \cdot 10^{-7} \times 1 \times \frac{70}{12 \cdot 10^{-2}} \times 1970 = 1,44 \text{ T}$$
$$E_0 = -N_s S B_0 = -40 \times 1,08 \times 1,44 = 62,4 \text{ V} \quad E_l = 108 \text{ V}$$

VI.3. Modèle équivalent de Behn-Eschenburg.

VI.3.1.

$$\text{VI.3.1 a) } \Phi_1^t = \Phi_1^r + \Phi_1^1 + \Phi_1^2 + \Phi_1^3 = \Phi_1^r + L_s i_1 + M_s i_2 + M_s i_3$$

VI.3.1 b) $i_1 + i_2 + i_3 = 0$ (loi des nœuds au point n). On en déduit :

$$\Phi_1^t = \Phi_1^r + L_s i_1 + M_s (i_2 + i_3) = \Phi_1^r + \Lambda_s i_1$$

VI.3.2.

$$\text{VI.3.2 a) } u_1 = e_1 + \Lambda_s \frac{di_1}{dt} - R_S i_1$$

VI.3.2 b)

VI.3.2 c)

VI.4. Étude du régime nominal.

VI.4.1.

VI.4.1 a)

VI.4.1 b)

VI.4.1 c)

VI.4.1 d)

VI.4.2.

VI.4.2 a)

VI.4.2 b)

VI.4.2 c)

VI.4.3.

VI.4.3 a)

VI.4.3 b)

VI.4.3 c)